



Problèmes inverses en acoustique sous-marine : prédiction de performances et localisation de source en environnement incertain

Yann Le Gall

► To cite this version:

Yann Le Gall. Problèmes inverses en acoustique sous-marine : prédiction de performances et localisation de source en environnement incertain. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Télécom Bretagne; Université de Bretagne Occidentale, 2015. Français. NNT : . tel-01254838

HAL Id: tel-01254838

<https://hal.science/tel-01254838>

Submitted on 12 Jan 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / Télécom Bretagne
sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne

pour obtenir le grade de Docteur de Télécom Bretagne
En accréditation conjointe avec l'Ecole Doctorale Sicma
Mention : Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

présentée par

Yann Le Gall

préparée dans le département Signal et Communications
Laboratoire Labsticc

Problèmes inverses en acoustique sous-marine : prédiction de performances et localisation de source en environnement incertain

Thèse soutenue le 05 octobre 2015
Devant le jury composé de :

Jérôme Idier
Directeur de recherche, IRCCyN – Nantes / président

Pascal Larzabal
Professeur, Satie – ENS Cachan / rapporteur

Jérôme Mars
Professeur, Gipsa-lab – Grenoble INP / rapporteur

Dominique Fattaccioli
Ingénieur, DGA Techniques Navales – Toulon / examinateur

Jean-Michel Passerieux
Ingénieur, Thales Underwater Systems – Sophia Antipolis / examinateur

Julien Bonnel
Maître de conférences, ENSTA Bretagne / examinateur

François-Xavier Socheleau
Maître de conférences, Télécom Bretagne / examinateur

Ronan Fablet
Professeur, Télécom Bretagne / directeur de thèse

Sous le sceau de l'Université européenne de Bretagne

Télécom Bretagne

En accréditation conjointe avec l'Ecole Doctorale Sicma

Problèmes inverses en acoustique sous-marine : prédiction de performances et localisation de source en environnement incertain

Thèse de Doctorat

Mention : Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

Présentée par **Yann Le Gall**

Département : Signal et Communications

Laboratoire : UMR CNRS 6285 Lab-STICC

Pôle : CID

Directeur de thèse : Ronan Fablet

Thèse soutenue le 05 Octobre 2015

Jury :

M. Pascal Larzabal	Professeur, ENS Cachan	<i>Rapporteur</i>
M. Jérôme Mars	Professeur, Grenoble INP	<i>Rapporteur</i>
M. Dominique Fattaccioli	Expert acoustique sous-marine, DGA TN	<i>Examineur</i>
M. Jérôme Idier	Directeur de recherche, IRCCyN	<i>Examineur</i>
M. Jean-Michel Passerieux	Expert sonar, Thales Underwater Systems	<i>Examineur</i>
M. Ronan Fablet	Professeur, Télécom Bretagne	<i>Directeur de thèse</i>
M. Julien Bonnel	Enseignant-chercheur, ENSTA Bretagne	<i>Encadrant</i>
M. François-Xavier Socheleau	Maître de conférences, Télécom Bretagne	<i>Encadrant</i>

Pour Owen,

Cette thèse a été préparée au sein du Lab-STICC à l'ENSTA Bretagne et à Télécom Bretagne d'octobre 2012 à septembre 2015. Elle a été financée par une bourse de la direction générale de l'armement (DGA). Une partie des travaux présentés dans ce mémoire est issue d'une collaboration avec le professeur Stan E. Dosso de l'université de Victoria, Victoria, Canada.

Remerciements

Comme on dit dans ma Bretagne natale «*Mersi bras !*». Pour commencer, je voudrais remercier mes directeurs de thèse : François-Xavier Socheleau, Julien Bonnel et Ronan Fablet. Merci FX pour ton soutien indéfectible, ta disponibilité, ta rigueur scientifique et pour m'avoir donné les clés de cette thèse. Merci aussi pour tes explications toujours limpides, en tout cas plus limpides que tes dribbles sur les terrains de basket ! Merci Julien pour tes encouragements, ton ouverture d'esprit et pour m'avoir initié à la propa modale et toutes ces belles choses de l'acoustique sous-marine. Merci également pour tous les bons moments partagés dans l'AP team et en conférence. Merci Ronan pour ton suivi et tes conseils pertinents dans les moments importants de la thèse.

I would like to thank Stan Dosso for his warm welcome at the University of Victoria. Thanks for your time, for your explanations on Bayesian inversion and for all your valuable advice.

Merci aux membres du Jury d'avoir accepté de se pencher sur mes travaux ainsi que pour leurs commentaires pertinents et non dénués d'humour parfois (il est vrai que j'avais oublié la borne tobealive de Patrick Hernandez !). J'adresse mes remerciements à Jérôme Idier pour avoir accepté de présider ma soutenance de thèse ainsi que pour ses retours sur le manuscrit. Je remercie Pascal Larzabal et Jérôme Mars d'avoir rapporté mes travaux avec un grand soin. Merci à Dominique Fattaccioli et Jean-Michel Passerieux d'avoir examiné mes travaux et pour leurs questions judicieuses sur les cotés applicatifs et opérationnels de la thèse.

Un grand merci à tous les membres de l'équipe AP de l'ENSTA Bretagne sans qui ces trois années de thèse n'auraient pas été les mêmes. Je suis particulièrement reconnaissant envers Florent Le Courtois, président du Brest Acoustical Review, qui fut mon co-bureau pendant toute la durée de ma thèse. Merci pour tes relectures d'articles et de chapitres de thèse, pour ton aide avec Matlab et Latex, ainsi que pour nos discussions sérieuses et il faut bien le dire souvent moins sérieuses. Merci à Alexis, Ali, Angélique, Bazile (j'espère que ta canne à pêche ne m'en veut pas trop), Ewen, Emmanuelle, Flore, Isabelle, Olivier et la « *bande de guignolos* » autrement dit les stagiaires pour leur bonne humeur et pour tous les bons moments passés ensemble à l'ENSTA Bretagne comme à l'extérieur. Je voudrais aussi remercier les secrétaires du Pôle STIC Annick et Michèle pour leur gentillesse, les membres de l'équipe IDM rencontrés lors des pauses cafés, et les membres de l'équipe OSM retrouvés en conférence à plusieurs reprises. Je n'oublie pas les membres du département SC de Télécom Bretagne qui m'ont accueilli un jour par semaine dans leurs locaux lors de ma dernière année. Je remercie également Florian Aulanier pour sa compagnie lors de ma première conférence à l'étranger.

Je tiens également à remercier les amis et la famille. Un grand merci à ceux qui m'ont fait l'honneur de venir assister à ma soutenance en sachant pertinemment qu'ils n'allaient pas tout comprendre. J'espère toutefois Papi que tu as compris que je ne passais pas ma journée devant une télé ! Merci à ceux avec qui j'ai pu passer une partie de mon temps libre. Merci aux pongistes Landernéens de m'avoir fait évacuer les frustrations inhérentes

à toute thèse sur la petite balle de celluloid. Merci à la troupe des coureurs pour Owen. Remerciement spécial à Gaël pour son aide sur un point important du manuscrit.

Enfin je remercie mes parents pour s'être occupé de mon instruction dans mes plus jeunes années, parfois contre mon gré, pour m'avoir communiqué le goût d'apprendre et de comprendre, et pour leur soutien moral et matériel pendant toutes ces années. Merci pour le temps passé à relire mon manuscrit à la recherche de fautes d'orthographe et de m'avoir déchargé d'une préparation de pot de thèse. Merci pour tout ! Je remercie également mes soeurs avec qui on peut toujours bien rigoler.

Table des matières

Acronymes	1
Notations	3
Introduction	5
1 Problème direct : propagation acoustique sous-marine	11
1.1 L'environnement océanique comme milieu acoustique	12
1.1.1 Propriétés acoustiques de la colonne d'eau	12
1.1.1.1 Célérité du son	13
1.1.1.2 Amortissement	15
1.1.2 Propriétés acoustiques du fond océanique	16
1.1.3 Dynamique de l'intérieur de l'océan	17
1.1.3.1 Ondes internes	17
1.1.3.2 Turbulences	19
1.1.4 Irrégularité des interfaces	19
1.2 Propagation du son dans l'océan	19
1.2.1 Chemins de propagation	19
1.2.2 Interactions au niveau des interfaces	21
1.2.3 Influence des hétérogénéités	23
1.2.3.1 Hétérogénéités de volume	23
1.2.3.2 Irrégularités de surface et de fond	24
1.2.4 Divergence géométrique	25
1.3 Modélisation acoustique : théorie des modes	25
1.3.1 Équation d'onde et conditions limites aux interfaces	26
1.3.2 Théorie des modes	27
1.3.3 Fonction de transfert	28
1.3.4 Interprétation physique et types de modes	28
1.3.5 Adaptation aux milieux range-dependent	30
1.4 Conclusion	31
2 Problème inverse : Matched-field processing	33
2.1 Formulation du problème	34
2.1.1 Configurations pratiques	34
2.1.1.1 Sources	35
2.1.1.2 Réception	36

2.1.2	Modèle du signal reçu	37
2.2	Estimation au sens du maximum de vraisemblance	39
2.2.1	Principe	40
2.2.2	Fonctions de coût	41
2.2.2.1	Modèle stochastique	41
2.2.2.2	Modèle déterministe	42
2.2.3	Implémentation numérique	43
2.3	Approche bayésienne	44
2.3.1	Principe	44
2.3.2	Gestion des paramètres de nuisance	45
2.3.3	Implémentation numérique	46
2.4	Limitations du matched-field processing	46
2.4.1	Bruit	47
2.4.2	Problème des inadéquations	47
2.5	Conclusion	48
3	Prédiction des performances	51
3.1	Analyse du problème	52
3.1.1	Comportement vis-à-vis du bruit	52
3.1.2	Impact des inadéquations	55
3.2	Outils de traitement du signal pour la prédiction des performances	57
3.2.1	Bornes de performances	57
3.2.1.1	Inégalité de covariance	58
3.2.1.2	Borne de Ziv-Zakai	59
3.2.2	Approximation des performances : méthode des erreurs d'intervalle	61
3.3	Prédiction des performances du MFP	62
3.3.1	Probabilité d'erreur binaire	63
3.3.1.1	Fonction de répartition des formes quadratiques de variables gaussiennes	63
3.3.1.2	Modèle déterministe	64
3.3.1.3	Cas du modèle stochastique	67
3.3.2	Erreur asymptotique	68
3.3.2.1	En l'absence d'inadéquations : borne de Cramer-Rao	69
3.3.2.2	En présence d'inadéquations : approximation locale	69
3.4	Application	72
3.4.1	Implémentation numérique	72
3.4.1.1	Évaluation des probabilités d'erreur binaires	72
3.4.1.2	Mise en place du MEI	73
3.4.1.3	Évaluation de la BZZ	73
3.4.2	Illustrations	73
3.4.2.1	En l'absence d'inadéquations	74
3.4.2.2	En présence d'inadéquations	77
3.5	Conclusion	79
4	Localisation de source dans un océan incertain	81

4.1	Etat de l'art	82
4.2	Localisation bayésienne de source avec une fonction de Green incertaine . .	84
4.2.1	Principe	84
4.2.2	Marginalisation de la fonction de Green	86
4.2.3	Fonction de Green incertaine dans un guide d'onde océanique incertain	88
4.2.3.1	Impact des incertitudes sur la propagation modale	88
4.2.3.2	Construction de la matrice de covariance	90
4.3	Application	92
4.3.1	Scénarios	92
4.3.2	Illustrations	95
4.3.3	Evaluation des performances par simulations de Monte-Carlo	97
4.4	Conclusion	99
5	Analyse des performances de la localisation de source sur un unique capteur par Matched-mode processing	101
5.1	Contexte mono-capteur	102
5.1.1	Source courte en temps et dispersion modale	102
5.1.2	Séparation des modes	103
5.1.3	Matched-mode processing	105
5.2	Analyse de performances	105
5.2.1	Scénarios	106
5.2.2	Analyse du problème	107
5.2.3	Validation du MEI en un point	109
5.2.4	Performances sans inadéquations	109
5.2.5	Performances en présence d'erreurs sur le modèle environnemental .	113
5.2.5.1	Inversion avec l'environnement B	113
5.2.5.2	Inversion avec l'environnement C	115
5.3	Conclusion	117
	Conclusion et perspectives	119
A	Annexe : Ondes internes	125
A.1	Ondes internes linéaires	125
A.2	Ondes internes non-linéaires	127
B	Annexe : Ondes de surface	131
C	Annexe : Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres	133
D	Annexe : Bornes de Cramer-Rao	135
D.1	Modèle déterministe	135
D.1.1	Modèle déterministe incohérent	136
D.1.2	Modèle déterministe cohérent	136
D.2	Modèle stochastique	137
E	Annexe : Bornes de Cramer-Rao bayésiennes	139

E.1	Modèle déterministe	139
E.2	Modèle stochastique	140
F	Annexe : Erreur asymptotique en présence d'inadéquations	141

Acronymes

Nous avons regroupé ci-dessous les principaux acronymes employés tout au long de ce mémoire. Pour des raisons de lisibilité, la signification d'un acronyme n'est souvent rappelée qu'à sa première apparition dans le texte d'un chapitre.

BCR	borne de Cramer-Rao
BCRB	borne de Cramer-Rao bayésienne
BCRH	borne de Cramer-Rao hybride
BZZ	borne de Ziv-Zakai
DPP	densité de probabilité <i>a posteriori</i>
EQM	erreur quadratique moyenne
MAP	maximum <i>a posteriori</i>
MEI	méthode des erreurs d'intervalle
MFP	matched-field processing
MMP	matched-mode processing
MV	maximum de vraisemblance
MVD	maximum de vraisemblance déterministe
MVS	maximum de vraisemblance stochastique
PBL	probabilité de bonne localisation
REQM	racine de l'erreur quadratique moyenne
RSB	rapport signal sur bruit

Notations

Nous avons regroupé ci-dessous les principales notations employées tout au long de ce mémoire.

\mathbf{a}	vecteur
$\bar{\mathbf{a}}$	vecteur normalisé
\mathbf{A}	matrice
$(\cdot)^T$	transposée
$(\cdot)^H$	transposée hermitienne
\mathbf{I}_N	matrice identité de taille $N \times N$
$\text{diag}(\mathbf{a})$	matrice diagonale contenant \mathbf{a} comme diagonale
$[\cdot]_{k,l}$	élément de la k-ième ligne et l-ième colonne d'une matrice
$\text{tr}(\cdot)$	trace
$ \cdot $	module pour les scalaires et déterminant pour les matrices
$\ \cdot\ $	norme euclidienne
$\text{Re}[\cdot]$	partie réelle
$\text{Im}[\cdot]$	partie imaginaire
$(\cdot)^*$	conjugué
$E[\cdot]$	espérance mathématique
$\text{Pr}(\cdot)$	probabilité d'un événement
$\mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	distribution d'un vecteur gaussien circulaire de moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et de matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$
$\delta(\cdot)$	distribution de Dirac

« Me ' gar ar mor. Boemet 'vezan gantañ, komz a ra ouzhin, e selaou a ran. Dre ma vez atav o kanañ, e vouskan a glever. A-walc'h eo mont d'e heul hag e komprenner ar pezh a c'heller. »

« J'aime la mer. Elle me fascine , elle me parle, je l'écoute. Comme elle chante tout le temps, on entend son murmure. Il suffit de le suivre et on comprend ce qu'on peut. »

Naig Rozmor

Introduction

L'acoustique offre un moyen de perception unique de notre océan. Contrairement aux ondes électromagnétiques qui s'atténuent rapidement dans l'eau de mer, les ondes sonores ont la faculté de se propager sur de longues distances dans le milieu marin. Scientifiques et ingénieurs ont ainsi mis au point des méthodes permettant de sonder notre océan en exploitant la propagation du son.

La faune marine a longtemps devancé l'homme quant à l'utilisation des ondes acoustiques dans le milieu marin. De nombreux cétacés par exemple (baleines, orques, dauphins...) produisent des sons pour communiquer, se repérer dans leur environnement ou encore pour détecter et localiser leurs proies. Les premières applications par l'homme datent de la fin du 19^{ème} siècle où des systèmes acoustiques commencent à être développés à des fins d'aide à la navigation. Par la suite, les développements en acoustique sous-marine sont largement motivés par les problèmes de lutte anti-sous-marine et de guerre des mines. La première et la deuxième guerre mondiale puis la guerre froide s'accompagnent d'avancées scientifiques et technologiques majeures. Des efforts importants sont consentis pour améliorer la connaissance de l'océan et ainsi mieux comprendre la propagation sous-marine, et des systèmes sonar sont mis au point afin de détecter et localiser les sous-marins. Si l'utilisation de l'acoustique dans un contexte de défense revêt toujours un intérêt majeur, l'acoustique sous-marine trouve aujourd'hui également des applications dans des domaines variés tels que la biologie, l'océanographie physique ou encore la géophysique. Les ondes acoustiques sont principalement utilisées pour la détection, classification, localisation de source ou de cibles, la caractérisation du milieu marin et les communications sous-marines. Dans ce mémoire nous nous intéressons aux aspects localisation et caractérisation du milieu marin.

La **détection, localisation** des sources, des cibles ou des obstacles peut s'effectuer de manière active ou passive [Waite02]. Les sonars actifs émettent un signal puis recherchent et analysent les échos en provenance de la cible ou de l'obstacle. Les sonars passifs écoutent et analysent les signaux émis par les sources, ils permettent de détecter et localiser des sous-marins, des navires, des mammifères marins ou encore des tremblements de terre. La localisation consiste à estimer la position de la source qui peut être déterminée par une profondeur dans la colonne d'eau, une distance par rapport au(x) récepteur(s) et/ou un azimut (angle entre la source et les récepteurs).

La **caractérisation du milieu marin** consiste à estimer des propriétés physiques de l'océan et du sous-sol qui affectent la propagation des ondes acoustiques : vitesse

de propagation des ondes acoustiques, courants, profondeur d'eau, densité des milieux, structure du fond, etc. La vitesse des ondes acoustiques dans la colonne d'eau est reliée aux paramètres hydrologiques de la colonne d'eau (température, salinité, pression), et les paramètres acoustiques du fond sont liés à la nature des matériaux constitutifs du fond. La caractérisation du milieu marin par l'acoustique trouve donc des applications en océanographie physique et en géophysique. L'objectif peut également être de modéliser acoustiquement le milieu de propagation afin d'utiliser cette information pour des expériences ultérieures de localisation ou bien pour caractériser les performances des systèmes sonar [Porter93]. Lorsque l'estimation porte sur les paramètres de la colonne d'eau on parle généralement de **tomographie** [Munk79, Munk95, Aulanier13], et lorsque l'estimation porte sur l'estimation des paramètres et de la structure du fond on parle d'**inversion géoacoustique** [Collins92, Ballard10, Quijano12]. La caractérisation du milieu marin peut se faire de manière active ou de manière passive en exploitant des sources d'opportunité comme les navires et les mammifères marins ou encore en utilisant le bruit ambiant.

Pour toutes ces applications, la nature de la propagation acoustique est largement influencée par le type d'environnement, la distance de propagation et la gamme de fréquence considérée. L'environnement océanique peut être séparé en deux grands type d'environnements, les environnements **grands fonds** du bassin océanique dont les profondeurs sont de l'ordre de quelques kilomètres et les environnements **petits fonds** du plateau continental dont les profondeurs sont généralement aux alentours de la centaine de mètres. Ces deux environnements sont remarquablement dissemblables pour la propagation des ondes acoustiques : le profil de célérité, les interactions aux interfaces et bien d'autres aspects y sont radicalement différents. On fait également la distinction entre la propagation en **champ proche** et la propagation en **champ lointain**. Le champ proche fait référence à des distances source/récepteur inférieures à quelques hauteurs d'eau pour lesquels la propagation acoustique peut se résumer à un trajet direct, un trajet réfléchi une fois à la surface plus éventuellement un trajet réfléchi une fois sur le fond. Le champ lointain fait référence aux distances de propagation plus importantes pour lesquels la propagation est plus complexe. La fréquence de l'onde acoustique conditionne également la propagation. Les **basses fréquences** pénètrent plus profondément dans le fond que les **hautes fréquences** et sont également moins atténuées ce qui leur permet de se propager sur de plus longues distances.

Dans ce mémoire nous nous intéressons principalement aux aspects **localisation de source** et caractérisation du milieu marin dans un contexte **basses fréquences** (< 1 kHz) en **champ lointain**. Nous privilégions le contexte **petits fonds** qui correspond aux zones d'intérêts stratégiques littorales et qui représente un environnement exigeant pour les applications visées du fait de sa grande variabilité. Cependant, une grande partie des outils et méthodes développés peuvent aussi s'appliquer directement ou être adaptés aux grands fonds.

Contexte et objectifs scientifiques

Les recherches et développements en acoustique sous-marine ont longtemps été motivés par des problématiques de défense navale. La première et la deuxième guerre mondiale puis la guerre froide contribuent à la mise en place de moyens de surveillance pour la lutte anti-sous-marine. Pour détecter une source basses fréquences en champ lointain, certains bâtiments sont équipés d'une longue antenne horizontale tractée constituée d'une série d'hydrophones. La formation de voies permet de discriminer la position angulaire de la source (azimut) tout en améliorant le rapport signal sur bruit pour la détection [Baggeroer99]. Elle ne permet pas d'estimer la profondeur et la distance de la source. Cette formation de voies suppose que le signal en provenance de la source arrive sous forme d'onde plane, hypothèse assez simplificatrice car en réalité la propagation dans l'océan déforme le front d'onde de façon complexe. À partir des années 1970, les progrès réalisés quant à la connaissance de l'océan et la modélisation de la propagation, conjointement à l'augmentation des puissances de calcul, font germer l'idée d'une nouvelle méthode de **localisation de source basses fréquences en champ lointain** dénommée **matched-field processing (MFP)** [Bucker76]. Le champ acoustique peut être modélisé à l'aide de l'équation d'onde et d'un modèle de l'environnement océanique (hauteur d'eau, vitesses du son dans l'eau et dans le fond...). L'estimation de la position de la source passe alors par la résolution du **problème inverse**. Ce problème est classiquement abordé comme un problème d'optimisation visant à minimiser une fonction d'erreur entre le champ de pression observé et celui issu du modèle de propagation, d'où l'appellation matched-field processing. Alors que la formation de voies subit les différents phénomènes de propagation qui déforment le front d'onde [Duda12], le MFP tire parti de cette complexité pour réaliser l'estimation. Le MFP permet ainsi d'estimer la profondeur et la distance de la source à l'aide d'une antenne horizontale comme d'une antenne verticale. Si la motivation première du MFP était avant tout la localisation des sous-marins ou des navires, la méthode du MFP peut aussi s'appliquer à la localisation de mammifères marins [Thode00] et à la **caractérisation du milieu marin** [Chapman12]. Le MFP présente également quelques variantes comme le **matched-mode processing (MMP)** qui permet sous certaines conditions de réaliser l'estimation à l'aide d'un unique capteur [Le Touzé08].

La méthode du MFP connaît de nombreux succès mais aussi des échecs cinglants qui viennent freiner son développement en contexte opérationnel [Baggeroer13]. En effet, le MFP présente certaines limitations qui peuvent entraver sa bonne application. Le MFP est bien entendu sensible au **bruit ambiant** présent dans l'océan, mais aussi et surtout aux **erreurs de modélisation** du champ acoustique qui sont inévitables car la connaissance de l'environnement océanique est toujours imparfaite. Mesurer l'impact de ces erreurs sur les performances et trouver des méthodes robustes à ces erreurs reste une problématique toujours d'actualité 40 ans après l'introduction du MFP.

Le but de ce travail de thèse est donc d'une part de proposer des outils afin de caractériser les **performances du MFP** en portant une attention particulière aux dégradations causée par les éventuelles erreurs de modélisation, et d'autre part de proposer des améliorations aux **méthodes du MFP** pour les rendre **robustes aux erreurs de modélisation**.

Organisation du manuscrit et contributions

Le manuscrit de thèse est organisé en cinq chapitres :

1. Problème direct : propagation acoustique sous-marine,
2. Problème inverse : matched-field processing,
3. Prédiction des performances,
4. Localisation de source dans un océan incertain,
5. Analyse des performances de la localisation de source sur un unique capteur par matched-mode processing.

Le **premier chapitre** présente des notions importantes sur la propagation acoustique sous-marine. L'environnement océanique est d'abord présenté en tant que milieu acoustique, puis l'influence de cet environnement sur la propagation du son est décrite de manière qualitative. La théorie des modes qui permet de calculer le champ acoustique est ensuite introduite. Cette théorie est adaptée au contexte de notre étude, c'est à dire à la modélisation de la propagation des basses fréquences en champ lointain dans les milieux petits fonds. Elle modélise le champ acoustique comme une somme de modes. Nous présentons également une interprétation physique des modes qui sera exploitée dans les chapitres 4 et 5. L'ensemble de ces considérations constitue le modèle direct qui permet de modéliser le champ acoustique dans l'océan.

Le **second chapitre** concerne l'estimation des paramètres de localisation et/ou des paramètres environnementaux par la méthode du MFP. Nous présentons d'abord les configurations pratiques classiques du MFP (sources, systèmes de réception) et plus formellement le modèle statistique du signal analysé. Différents modèles de signal source sont considérés : le modèle stochastique et le modèle déterministe. Deux approches du MFP sont ensuite présentées. Le MFP est d'abord présenté comme un problème d'estimation au sens du maximum de vraisemblance puis comme un problème d'inférence bayésienne. Enfin, nous insistons sur les limites du MFP en particulier vis-à-vis des erreurs de modélisation que nous qualifions d'inadéquations. Nous notons que les erreurs sur la modélisation de l'environnement océanique sont le principal problème du MFP.

Le **troisième chapitre** propose des outils statistiques de traitement du signal permettant de prédire les performances des estimateurs du maximum de vraisemblance présentés au chapitre précédent. L'originalité du travail réalisé repose principalement sur la considération du modèle de signal source déterministe. Le problème de l'analyse des performances du MFP est d'abord présenté de manière qualitative. Nous montrons que l'estimation par MFP est un problème non-linéaire qui souffre d'ambiguïtés importantes au delà d'un certain niveau de bruit et décrivons l'impact des inadéquations sur les performances. Les outils statistiques pour la prédiction des performances sont ensuite développés. La borne minimale d'estimation de Ziv-Zakai et la méthode des erreurs d'intervalle (MEI) sont considérées. Contrairement à la borne de Ziv-Zakai, le MEI permet de prendre en compte les inadéquations dans l'analyse des performances. Ces outils sont ensuite éprouvés sur des exemples de localisation de source en distance. Les travaux présentés dans ce chapitre ont fait l'objet de la rédaction d'articles pour des revues scientifiques. Les

performances en l'absence d'inadéquations sont développées dans l'article suivant :

Y. Le Gall, F-X. Socheleau, J. Bonnel, « Matched-field processing performance under the stochastic and deterministic signal models », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, no. 22, p. 5825-5838, 2014.

Les performances en présence d'inadéquations sont développées dans l'article récemment soumis suivant :

Y. Le Gall, F-X. Socheleau, J. Bonnel, « Performance prediction for matched-field processing with model mismatch », *IEEE Signal Processing Letters*, soumis en juillet 2015.

Le **quatrième chapitre** propose une approche bayésienne à la localisation de source par MFP adaptée aux milieux de propagation sous-marins incertains et donc robuste aux erreurs de modélisation de l'environnement océanique. Après un bref panorama des diverses méthodes existantes, nous présentons notre méthode. L'incertitude sur le milieu de propagation est prise en compte en modélisant la fonction de transfert entre la source et les récepteurs comme un vecteur aléatoire. Nous introduisons des hypothèses physiques sur la propagation modale pour modéliser l'incertitude sur cette fonction de transfert. L'approche proposée est illustrée et validée sur des scénarios dans lesquels on introduit des erreurs de modélisation de l'environnement. Ce travail est développé dans l'article suivant :

Y. Le Gall, S. E. Dosso, F-X. Socheleau, J. Bonnel, « Bayesian source localization with uncertain Green's function in an uncertain shallow water ocean », *The Journal of the Acoustical Society of America*, en cours de révision.

Le **cinquième chapitre** est une ouverture vers le contexte mono-capteur. Il est consacré à l'analyse des performances de la localisation de source sur un unique capteur à l'aide de la variante du MFP appelée matched-mode processing (MMP). Lorsque la source est courte en temps, des méthodes temps-fréquence permettent parfois de séparer les modes composant le champ acoustique à l'aide d'un unique hydrophone. Ces modes peuvent alors être exploités pour estimer les paramètres d'intérêt en utilisant la méthode du MMP. Après avoir présenté le contexte d'application et la méthode du MMP mono-capteur, les outils développés au chapitre 3 pour la prédiction des performances du MFP sont exploités pour analyser les performances de la localisation de source sur un unique capteur par MMP. Ce chapitre peut également être vu comme une illustration du type d'analyse qui peut être menée avec les outils du chapitre 3.

Outre les articles mentionnés précédemment, ces travaux de thèse ont fait l'objet de présentations en conférence. D'autres travaux qui ne sont pas directement en rapport avec le sujet de thèse et non présentés dans ce manuscrit ont également fait l'objet d'articles et de communications en conférence. L'ensemble des articles et conférences réalisés durant ces trois années de thèse est reporté ci-dessous.

Articles de revue

- Y. Le Gall, F-X. Socheleau, J. Bonnel, « Performance prediction for matched-field processing with model mismatch », *IEEE Signal Processing Letters*, soumis.
 - Y. Le Gall, S. E. Dosso, F-X. Socheleau, J. Bonnel, « Bayesian source localization with uncertain Green's function in an uncertain shallow water ocean », *The Journal of the Acoustical Society of America*, en cours de révision.
 - Y. Le Gall, F-X. Socheleau, J. Bonnel, « Matched-field processing performance under the stochastic and deterministic signal models », *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, no. 22, p. 5825-5838, 2014.
 - Y. Le Gall, J. Bonnel, « Passive estimation of the waveguide invariant per pair of modes », *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 134, no 2, p. EL230-EL236, 2013.
 - Y. Le Gall, J. Bonnel, « Débruitage et séparation dans le plan temps-fréquence des contributions sonores de navires en mouvement », *Traitement du Signal*, vol. 30, no 3-4-5/2013, p. 149-168, 2013.
-

Conférences internationales

- Y. Le Gall, S. E. Dosso, F-X. Socheleau, J. Bonnel, « Bayesian source localization with uncertain Green's function », *IEEE Oceans*, (Genova, Italy), 2015.
 - Y. Le Gall, F-X. Socheleau, J. Bonnel, « Performance analysis of single receiver matched-mode processing for source localization », *Proceedings UA2014 2nd Underwater Acoustics Conference and Exhibition*, (Rhodes, Greece), p. 759-764, 2014.
 - Y. Le Gall, J. Bonnel, « Separation of moving ship striation patterns using physics-based filtering », *Proceedings of Meetings on Acoustics*, (Montréal, Canada), Vol. 19, No. 1, p. 070073, 2013.
-

Conférences nationales

- Y. Le Gall, J. Bonnel, « Méthode d'estimation de l'invariant océanique par couple de modes en acoustique sous-marine passive », *actes du 24ème colloque du GRETSI 2013*, (Brest, France), 2013.

Chapitre 1

Problème direct : propagation acoustique sous-marine

Sommaire

1.1	L'environnement océanique comme milieu acoustique	12
1.1.1	Propriétés acoustiques de la colonne d'eau	12
1.1.1.1	Célérité du son	13
1.1.1.2	Amortissement	15
1.1.2	Propriétés acoustiques du fond océanique	16
1.1.3	Dynamique de l'intérieur de l'océan	17
1.1.3.1	Ondes internes	17
1.1.3.2	Turbulences	19
1.1.4	Irrégularité des interfaces	19
1.2	Propagation du son dans l'océan	19
1.2.1	Chemins de propagation	19
1.2.2	Interactions au niveau des interfaces	21
1.2.3	Influence des hétérogénéités	23
1.2.3.1	Hétérogénéités de volume	23
1.2.3.2	Irrégularités de surface et de fond	24
1.2.4	Divergence géométrique	25
1.3	Modélisation acoustique : théorie des modes	25
1.3.1	Équation d'onde et conditions limites aux interfaces	26
1.3.2	Théorie des modes	27
1.3.3	Fonction de transfert	28
1.3.4	Interprétation physique et types de modes	28
1.3.5	Adaptation aux milieux range-dependent	30
1.4	Conclusion	31

La propagation du son dans l’océan est dictée par l’équation d’onde et par les propriétés océanographiques et géologiques du milieu océanique. Pour modéliser le champ acoustique, il faut donc connaître l’environnement océanique et recourir à l’application d’une méthode adéquate de résolution de l’équation d’onde. Une quantité importante de travaux a été menée aussi bien dans les domaines de l’océanographie et de la géologie que dans le domaine de la physique des ondes pour améliorer notre connaissance et notre compréhension des phénomènes de propagation acoustique dans l’océan. Ce chapitre présente de manière concise les notions de propagation acoustique sous-marine nécessaires à la compréhension de ce mémoire. Une attention particulière est portée dans un premier temps à la description de l’environnement océanique en tant que milieu de propagation acoustique. On note que le milieu marin est variable géographiquement et temporellement. Le lien entre les propriétés physiques de l’océan et la propagation est ensuite présenté avant de s’intéresser aux méthodes de calcul du champ acoustique. La plupart des informations données dans ce chapitre peuvent être retrouvées dans des ouvrages de références. Une bonne présentation du milieu océanique et de sa variabilité est réalisée dans le livre de Etter [Etter13]. Les différentes méthodes de calcul du champ acoustique sont décrites en détail dans le livre de Jensen et. al [Jensen11]. Il existe également un livre dédié aux environnements petits fonds [Katsnelson12]. Pour un ouvrage en français, on peut se référer au livre de Lurton [Lurton98].

1.1 L’environnement océanique comme milieu acoustique

L’océan peut être considéré comme un guide d’onde acoustique horizontal délimité par la surface de l’eau et le fond marin. D’un point de vue purement acoustique, ce guide d’onde est caractérisé par sa hauteur d’eau, ainsi que par la célérité du son, la densité et l’amortissement dans la colonne d’eau et le fond marin. L’environnement océanique peut être séparé en deux grands types d’environnements, les environnements grands fonds du bassin océanique dont les profondeurs sont de l’ordre de quelques kilomètres et les environnements petits fonds du plateau continental dont les profondeurs sont généralement aux alentours de la centaine de mètres. Ces deux environnements sont remarquablement différents pour la propagation des ondes acoustiques. Cette section présente les principales caractéristiques de l’environnement océanique en tant que milieu de propagation acoustique.

1.1.1 Propriétés acoustiques de la colonne d’eau

L’eau de mer est un fluide dans lequel des ondes acoustiques de compression peuvent se propager. Elle est pour l’essentiel composée de deux constituants, de l’eau et des sels divers. Les propriétés acoustiques de l’eau de mer dépendent des conditions de tempéra-

ture, de salinité (autrement dit de la quantité de sel dissous) et de pression dans l'océan. La densité de l'eau de mer varie typiquement de 1000 à 1050 kg/m³ et peut être considérée comme constante pour la modélisation de propagation acoustique. La propagation du son dans la colonne d'eau est principalement affectée par les variations de célérité et par l'amortissement des ondes acoustiques dans l'eau de mer.

1.1.1.1 Célérité du son

Des formules empiriques permettent d'exprimer la célérité en fonction de la température T , de la salinité S et de la pression P [Dushaw93]. La pression dans la colonne d'eau étant linéairement liée à la profondeur, la célérité est souvent exprimée directement en fonction de la profondeur z . La formule suivante, proposée par Clay et Medwin, est classiquement utilisée en acoustique sous marine [Clay77]

$$c = 1449.2 + 4.6T - 0.055T^2 + 0.00029T^3 + (1.34 - 0.01T)(S - 35) + 0.016z \quad (1.1)$$

La température y est exprimée en degré centigrade, la salinité en ‰ (pour-mille), la profondeur en mètres et c est la célérité en m/s. La célérité est une fonction croissante de la température et de la profondeur. Pour les conditions typiques de température, de salinité et de pression rencontrées à l'intérieur de notre océan, la célérité des ondes acoustiques est essentiellement comprise entre 1440 et 1540 m/s. Les variations de la vitesse du son dans l'océan sont donc relativement faibles. Cependant, ces petites variations de célérité peuvent significativement affecter la propagation du son. Hormis dans les zones frontalières entre masses d'eau chaude et froide, les variations verticales de célérité sont beaucoup plus importantes que les variations horizontales. Le champ de célérité sur une région géographique à un instant donné peut donc être approché par un profil de célérité (ou profile bathycélérimétrique) représentant la vitesse du son en fonction de la profondeur. L'allure du profil de célérité dicte la propagation du son dans l'océan. Les figures 1.1 et 1.2 illustrent des profils de célérité typiques dans l'océan respectivement en grands fonds et en petits fonds.

Grands fonds :

La couche du profil de célérité proche de la surface est fortement influencée par les conditions climatiques à l'extérieur de l'océan et est sujette à de plus grandes variabilités. Le brassage des eaux de surface par l'agitation de la surface crée souvent une couche homogène dans laquelle la température est constante. L'augmentation de la pression avec la profondeur induit alors une augmentation de la célérité dans cette couche, on parle alors de *chenal de surface*. Durant les périodes plus chaudes et plus calmes, un gradient de température peut toutefois se former. Sous cette couche de surface se trouve la thermocline principale, peu affectée par les conditions de surface, et où la température et donc la célérité décroît avec la profondeur (le terme *thermocline* dénote une couche où la température varie avec la profondeur). À partir d'une certaine profondeur, la température cesse de diminuer et se stabilise, on entre alors dans la couche isotherme où la célérité augmente avec la profondeur du fait de l'augmentation de la pression. Ainsi, entre la thermocline principale et la couche isotherme se trouve un minimum de célérité qui forme ce

que l'on appelle communément le *chenal profond*. Les régions polaires possèdent un profil de célérité spécifique du fait de leurs conditions climatiques particulières. La température y est plus froide au niveau de la surface, le minimum de célérité est alors atteint aux alentours de la surface. Le profil de célérité dans les zones polaires est illustré en ligne traitillée/pointillée.

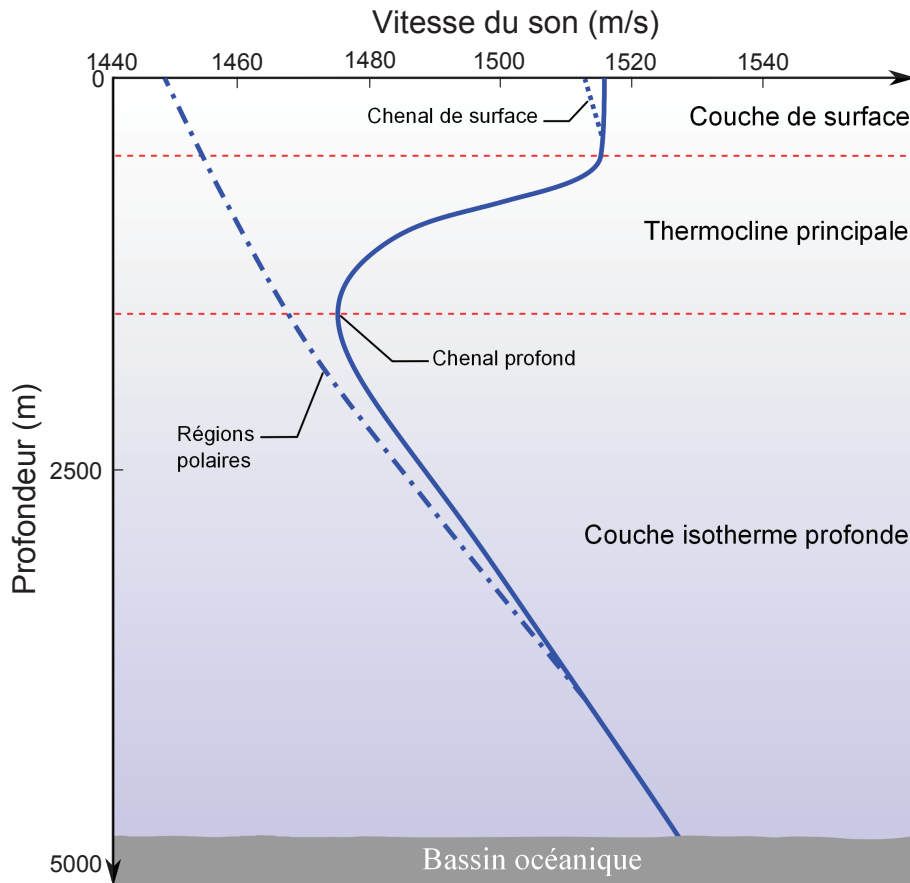


FIGURE 1.1 – Profils de célérité typiques en grands fonds.

Petits fonds :

A l'image de la couche de surface en grands fonds, la célérité dans les milieux petits fonds est le résultat de la confrontation entre les conditions extérieures de température et le brassage vertical de la colonne d'eau par le vent et les courants. Sur le plateau continental, la hauteur d'eau n'est généralement pas assez importante pour que les variations de pressions affectent significativement la célérité. On retrouve donc souvent un profil de célérité quasi-constant représentatif de conditions de température homogènes dans la colonne d'eau. Dans certaines régions, un profil à trois niveaux peut se former en été avec le réchauffement de la surface. On retrouve alors une couche homogène chaude en surface, puis une thermocline dans laquelle la température diminue avec la profondeur et enfin une couche homogène froide en profondeur. De manière général, le profil de célérité dans les milieux petits fonds est sujet à une plus grande variabilité géographique et temporelle que le profil de célérité dans les milieux grands fonds [Katsnelson12].

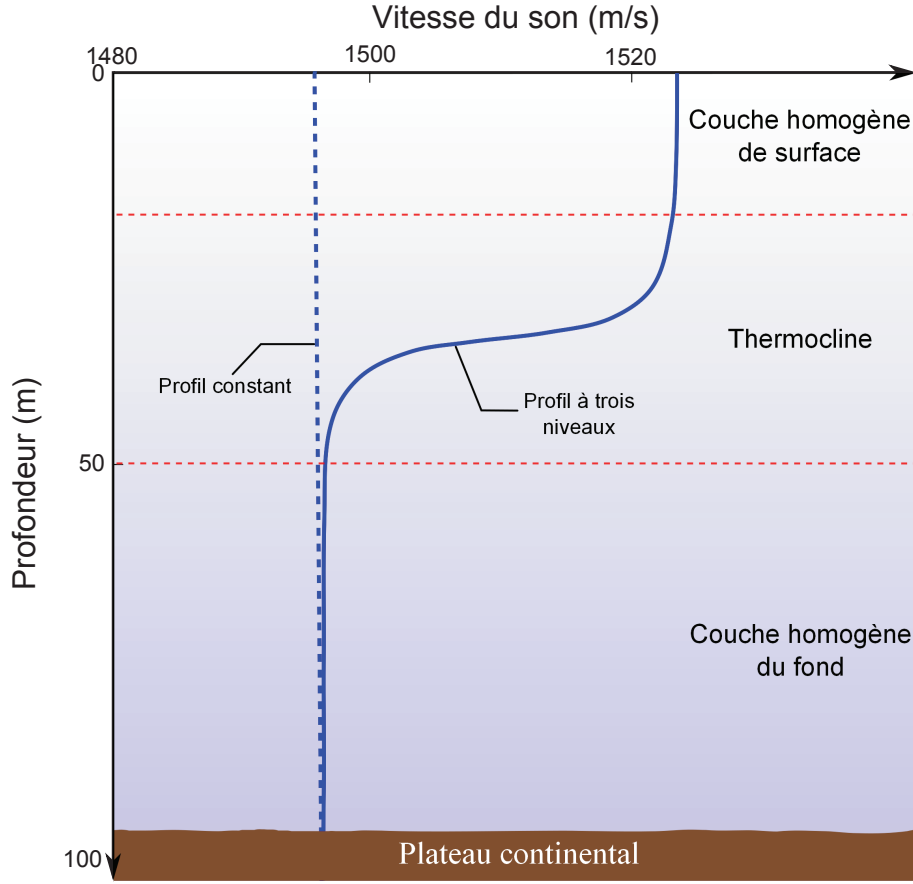


FIGURE 1.2 – Profils de célérité typiques en petits fonds.

1.1.1.2 Amortissement

La propagation des ondes acoustiques dans l'eau de mer s'accompagne d'un phénomène d'amortissement donnant lieu à une atténuation de l'onde. Ces pertes par amortissement sont causées par la viscosité de l'eau qui introduit des frottements à l'échelle moléculaire et donc des pertes d'énergie sous forme thermique pour des ondes acoustiques de très hautes fréquences (> 100 kHz), ou à des fréquences inférieures par la relaxation de composés chimiques tels que l'acide borique $B(OH)_3$ et le sulfate de magnésium $MgSO_4$. Pour modéliser l'amortissement, on introduit un coefficient d'atténuation α , généralement donné en dB/km ou en dB/m, décrivant une décroissance exponentielle de l'amplitude A du champ acoustique avec la distance r :

$$A = A_0 \exp(-\alpha r), \quad (1.2)$$

où A_0 est l'amplitude initiale de l'onde en $r = 1$ mètre. Le coefficient d'atténuation α dépend largement de la fréquence f de l'onde acoustique. Plusieurs modèles existent pour ce coefficient. En particulier, une relation empirique approximative entre α et la fréquence f est communément employée pour modéliser l'atténuation dans l'eau de mer.

Cette relation est donnée par [Thorp67] :

$$\alpha = 3.3 \times 10^{-3} + \frac{0.11f^2}{1+f^2} + \frac{43f^2}{4100+f^2} + 2.98 \times 10^{-4}f^2 \text{ [dB/km]}, \quad (1.3)$$

Bien que l'atténuation dépende aussi des conditions de température, de salinité, de pression et d'acidité de l'eau, l'expression ci-dessus est considérée valide pour la plupart des situations rencontrées dans l'océan. Le coefficient d'atténuation croît avec la fréquence. L'atténuation dans l'eau de mer affecte principalement les hautes fréquences pour lesquelles les phénomènes de relaxation chimique et de frottement visqueux sont importants. Cette atténuation est souvent négligée aux basses fréquences (< 1 kHz).

1.1.2 Propriétés acoustiques du fond océanique

Quand le son interagit avec le fond marin, la structure et les propriétés du fond ont une influence importante sur la propagation acoustique. Le fond est constitué de sédiments et de roches dans lesquels peuvent se propager des ondes acoustiques de compression (de célérité notée c_p) ainsi que de cisaillements (de célérité notée c_s). Des pertes par amortissement ont également lieu dans ces matériaux. Pour caractériser ces pertes on introduit les coefficients d'atténuation α_p et α_s associés respectivement aux ondes de compression et de cisaillement. L'amortissement dépend de la fréquence et donc de la longueur d'onde des ondes de compression et de cisaillement. Le coefficient d'atténuation est généralement donné en dB/longueur d'onde auquel cas l'atténuation en dB/m est supposée être une fonction linéaire de la fréquence ($\alpha_{\text{dB/m}} = \alpha_{\text{dB}/\lambda} \times f/c$). Cependant, des relations de puissance plus complexes entre la fréquence et l'atténuation en dB/m peuvent également être avancées [Carey08].

Les matériaux constitutifs du fond sont donc caractérisés d'un point de vue acoustique par leur densité ρ , par les célérités c_p et c_s , et par les coefficients d'atténuation α_p et α_s . Ces paramètres sont communément appelés *paramètres géoacoustiques*. Le tableau 1.1 présente des valeurs typiques de paramètres géoacoustiques pour différents types de fond.

Nature du fond	ρ (g/cm ³)	c_p (m/s)	c_s (m/s)	α_p (dB/ λ_p)	α_s (dB/ λ_s)
Argile	1.5	1500	<100	0.2	1.0
Vase	1.7	1575	$80\tilde{z}^{0.3}$	1.0	1.5
Sable	1.9	1650	$110\tilde{z}^{0.3}$	0.8	2.5
Moraine	2.1	1950	600	0.4	1.0
Craie	2.2	2400	1000	0.2	0.5
Calcaire	2.4	3000	1500	0.1	0.2
Basalte	2.7	5250	2500	0.1	0.2

TABLE 1.1 – Valeurs typiques des paramètres géoacoustiques pour différentes natures du fond [Jensen11]. Pour certains matériaux, la célérité des ondes de cisaillement dépend de la profondeur \tilde{z} sous l'interface eau/fond.

On peut noter que les sédiments fins et mous (argile et vase par exemple) ont des célérités et une densité plus faibles que les sédiments plus grossiers (sable). Aussi, les célérités et la densité seront plus faibles pour du sable fin que pour du sable grossier. D'autre part, on peut également remarquer que l'atténuation des ondes acoustique dans les matériaux du fond est bien plus importante que l'atténuation dans l'eau de mer. Par exemple, l'atténuation des ondes de compression à 100 Hz est environ de 0.004 dB/km dans l'eau alors qu'elle est de 2 dB/km dans le basalte et 63 dB/km dans la vase [Jensen11].

Le fond océanique est habituellement composé d'un empilement de strates de différents matériaux. On peut en général découper le profil vertical du fond en trois régions, d'abord une région composée de sédiments non-consolidés (argile, vase, sables ...), puis une région composée de roches sédimentaires (calcaire, craie...) et enfin un socle composé de roches métamorphiques ou magmatiques [Hamilton80].

Les matériaux du fond océanique sont souvent modélisés comme des fluides ce qui permet de s'affranchir des ondes de cisaillement dans les calculs tout en conservant une bonne approximation des phénomènes de propagation dans l'océan [Jensen11].

1.1.3 Dynamique de l'intérieur de l'océan

Le milieu océanique n'est pas figé, il présente une variabilité spatiale et temporelle associée entre autre à la circulation océanique des différentes masses d'eau dans l'océan [Etter13]. Des processus dynamiques de petite échelle comme les ondes internes ou les turbulences se déroulent aussi constamment à l'intérieur de ces masses d'eau et y modifient sensiblement la structure de la célérité du son. Contrairement aux grands mouvements des masses d'eau, ces modifications de petites dimensions sont peu prévisibles et sont considérées comme des hétérogénéités volumiques aléatoires pour la propagation dans l'océan.

1.1.3.1 Ondes internes

Les ondes internes sont des mouvements de volumes d'eau à l'intérieur de l'océan. Elles sont rendues possibles par l'augmentation de la densité de l'eau avec la profondeur due aux évolutions de la température et de la salinité. Dans un milieu stratifié, si l'on déplace une petite quantité d'eau à la verticale, l'équilibre entre la force de gravité et la poussée d'Archimède qui s'exerce sur cette quantité d'eau est rompue et cette quantité d'eau va osciller à la fréquence de flottabilité N (appelée aussi fréquence de Brunt-Väisälä). Dans le milieu océanique il faut aussi tenir compte de la force de Coriolis due à la rotation de la terre, les ondes internes oscillent à des fréquences comprises entre la fréquence inertielle f_c (aussi appelée fréquence de Coriolis) et la fréquence de flottabilité N .

Les ondes internes font varier le profil de célérité dans le temps et l'espace. La variation de célérité dans le plan distance/profondeur (r, z) est liée au déplacement des

volumes d'eau par la relation [Flatté79] :

$$\delta c(r, z, t) = \eta(r, z, t) \left(\frac{\delta c}{\delta z} \right)_{pot} \approx \eta(r, z, t) c_0(z) G(z) N^2(z), \quad (1.4)$$

ou $\delta c(r, z, t)$ est la variation de célérité par rapport au profil moyen $c_0(z)$, $\eta(r, z, t)$ le déplacement, $(\frac{\delta c}{\delta z})_{pot}$ le gradient de célérité potentielle¹, $G(z)$ une fonction des dérivées de la température et de la salinité par rapport à la profondeur, et $N(z)$ la fréquence de flottabilité à la profondeur z .

On trouve deux types d'ondes internes à l'intérieur des océans : les ondes internes linéaires que l'on retrouve presque partout et les ondes internes non-linéaires qui se forment dans des circonstances plus particulières et que l'on retrouve surtout dans les milieux petits fonds.

Ondes internes linéaires

Les ondes internes linéaires obéissent à une équation différentielle linéaire classique. Elles forment un champ aléatoire de perturbation de célérité bidimensionnel $\delta c(r, z, t)$ en distance r et profondeur z qui évolue dans le temps. Les variations de célérité sont plus importantes au niveau de la thermocline où la température et donc la densité de l'eau varient significativement. La fréquence inertielle f_c est de un cycle par jour à 30 degrés de latitude, et la fréquence de flottabilité $N(z)$ peut typiquement monter jusqu'à 10 cycles par heure. Dans le milieu océanique, l'échelle temporelle des ondes internes linéaires s'échelonne donc typiquement de quelques minutes à une journée. L'échelle spatiale horizontale des ondes internes est de quelques mètres pour les ondes internes proches de la fréquence de flottabilité jusqu'à une dizaine de kilomètres pour les ondes internes proches de la fréquence inertielle et l'échelle spatiale verticale va du mètre à environ cent mètres. Il faut noter que l'énergie des ondes internes est plus importante dans les basses fréquences près de la fréquence inertielle que dans les hautes fréquences près de la fréquence de flottaison. Les processus physiques qui fournissent leur énergie aux ondes internes ne sont pas précisément identifiés : vents, courants, et marées font partie des candidats possibles. Plus de détails sur la modélisation des ondes internes linéaires sont donnés en annexe A.

Ondes internes non-linéaires

La modélisation linéaire des ondes internes ne suffit pas à décrire l'ensemble des ondes internes que l'on peut observer dans l'océan. Des ondes internes non-linéaires de forte amplitude sont fréquentes dans certaines régions du globe. Ces ondes internes se forment dans des conditions particulières de stratification, de bathymétrie et de courant. Ces conditions sont souvent réunies au niveau du talus continental à la frontière du plateau continental, où l'action de la marée génère des ondes internes non-linéaires qui se propagent sur le plateau continental ou de l'autre côté dans les grands fonds. C'est la raison pour laquelle les ondes internes non-linéaires sont fréquentes au niveau des régions côtières. Les ondes internes se présentent généralement sous la forme de paquets ordonnés d'ondes solitaires (appelées aussi *solitons*) qui imposent un fort affaissement de la

1. le terme *potentielle* signifie que l'on fait abstraction des variations dues aux variations de pression

thermocline. Plus de détails sur les ondes internes non-linéaires sont également donnés en annexe A.

1.1.3.2 Turbulences

Des turbulences peuvent aussi se former dans différentes circonstances [Flatté79]. L'eau sous la surface peut être très turbulente en raison de l'agitation de la surface. Des turbulences peuvent aussi se former lorsque des ondes internes se brisent ou encore sous l'effet de la friction engendrée par les courants. Les écoulements turbulents sont associés à des fluctuations de température et de salinité et donc à des fluctuations de célérité dont les dimensions sont relativement faibles (de l'ordre du mètre à quelques centimètres).

1.1.4 Irrégularité des interfaces

Les interfaces entre l'eau et l'air ou le fond ne sont pas parfaitement planes. L'interface air/eau peut être très dynamique sous l'influence du vent. Le vent crée des ondes de surfaces (vagues) qui introduisent une hauteur d'eau et des conditions limites aléatoires pouvant impacter la propagation acoustique. Plus de détails sur la modélisation des ondes de surfaces sont donnés en annexe B.

Le fond océanique présente également une profondeur variable dans l'espace dont l'écart type sur des distances de 10 à 1000 mètres peut être assez important. Cette profondeur est relativement stable dans le temps puisqu'elle dépend surtout des grands courants et des activités sismiques occasionnelles. Si l'on dispose actuellement de moyens performants pour mesurer cette profondeur, l'immensité de l'océan interdit une caractérisation précise de l'ensemble du fond océanique. La rugosité du fond océanique doit donc bien souvent être modélisée comme aléatoire.

1.2 Propagation du son dans l'océan

La propagation acoustique dans l'océan peut être appréhendée de manière qualitative. Cette section vise à présenter les principaux phénomènes de propagation dans l'océan.

1.2.1 Chemins de propagation

La propagation du signal émis par une source acoustique dans l'océan peut être représentée par un ensemble de trajets acoustiques (ou chemins de propagation) émanant de cette source. Ces trajets sont expliqués par la loi de *Snell-Descartes*,

$$\frac{\cos \theta(z)}{c(z)} = \text{constante}, \quad (1.5)$$

qui relie la célérité locale $c(z)$ à la profondeur z , à l'angle de propagation $\theta(z)$ du trajet acoustique par rapport à l'horizontal. Ainsi, l'angle de propagation d'un trajet acoustique diminue lorsque le trajet se propage vers des zones de célérité plus élevée et les trajectoires s'incurvent vers les régions de plus faible vitesse, c'est le phénomène de réfraction. La propagation du son peut donc être piégée dans certaines régions du profil de célérité lorsque celui-ci présente un ou plusieurs minima locaux de célérité bien marqué. Ces régions sont souvent appelées chenaux de propagation.

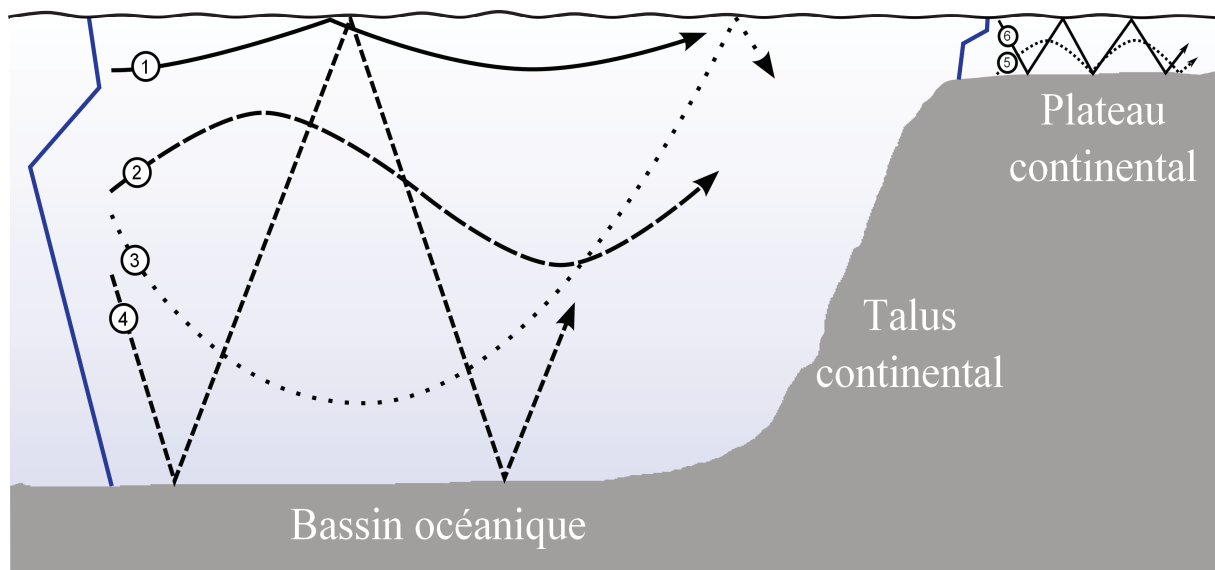


FIGURE 1.3 – Représentation schématique de différents chemins de propagation dans l'océan.

La figure 1.3 représente de façon schématique différents chemins de propagation possibles pour des profils de célérité typiques (représentés en bleu). La partie gauche représente des trajets en milieu grand fond dans le bassin océanique :

- Chemin 1 : propagation dans le chenal de surface. L'onde est réfractée dans le chenal et réfléchi à la surface. Ce type de propagation est possible pour des trajets à faible angle d'émission lorsque la source se trouve dans le chenal de surface.
- Chemin 2 : propagation dans le chenal profond. L'onde est réfractée de part et d'autre du minimum de célérité. Ce type de propagation est possible pour des trajets à faible angle d'émission lorsque la source se trouve dans le chenal profond.
- Chemin 3 : propagation avec zone de convergence. L'angle d'émission est plus grand que pour les chemins 1 et 2, l'onde est réfractée vers la surface dans une zone profonde du profil de célérité. Les trajets réfractés dans cette région du profil ont tendance à tous se focaliser à la surface au même endroit de façon périodique (tous les 35 - 65 km environ) produisant des zones de forte intensité acoustique.
- Chemin 4 : propagation réfléchi surface et fond. Les trajets de ce type peuvent être légèrement incurvés (non représenté ici) mais l'angle d'émission est suffisamment élevé pour que l'onde acoustique sorte du chenal profond et interagisse avec le fond

de l'océan. Ce type de propagation implique également une augmentation locale à intervalle régulier de l'intensité acoustique au niveau de la surface.

La partie droite de la figure 1.3 représente des trajets dans les environnements peu profonds rencontrés au niveau des plateaux continentaux. La propagation y est fondamentalement différente des milieux grands fonds. Les interactions avec la surface et le fond sont bien plus nombreuses et la propagation par réflexion aux interfaces constitue le type de propagation principal du fait de la faible profondeur. Cependant, d'autres types de propagation sont également possibles si le profil de célérité le permet comme c'est le cas ici (présence d'une thermocline) :

- Chemin 5 : propagation réfléchi fond et réfracté dans la thermocline. Ce type de propagation est possible pour des trajets à faible angle d'émission lorsque la source se trouve en profondeur.
- Chemin 6 : propagation réfléchi surface et fond. L'onde se propage en réalisant de multiples interactions avec la surface et le fond. C'est le type de propagation majoritaire dans les milieux petits fonds.

1.2.2 Interactions au niveau des interfaces

Comme illustré sur la figure 1.3, les ondes acoustiques peuvent interagir avec la surface et le fond de l'océan. Lors de ces interactions, l'onde incidente se réfléchit de façon totale ou partielle. On considère généralement que la réflexion au niveau de la surface est totale. La réflexion au niveau du fond peut par contre s'accompagner de pertes par transmission d'une partie de l'énergie dans le fond. Ces interactions modifient les propriétés de l'onde se propageant dans la colonne d'eau. Pour comprendre les phénomènes de réflexion et transmission, nous présentons les lois de la réflexion d'une onde plane sur une interface entre deux milieux fluides homogènes non absorbants.

Soient deux milieux fluides homogènes caractérisés par leur masse volumique ρ_1 et ρ_2 et leur célérité c_1 et c_2 . Comme présenté sur la figure 1.4, une onde incidente d'angle de rasance θ_1 induit une onde réfléchi d'angle également θ_1 dans le milieu 1 et une onde transmise d'angle θ_2 dans le milieu 2. L'interaction de l'onde avec l'interface est donc caractérisée par l'angle de l'onde transmise θ_2 et par le coefficient de réflexion R . Ce coefficient de réflexion représente le rapport d'amplitude entre l'onde réfléchi et l'onde incidente. L'angle θ_2 est lié à l'angle θ_1 par la loi de *Snell-Descartes*,

$$c_2 \cos \theta_1 = c_1 \cos \theta_2. \quad (1.6)$$

Le coefficient de réflexion est une fonction de l'angle d'incidence θ_1 et est donné par

$$R(\theta_1) = \frac{\rho_2 c_2 \sin \theta_1 - \rho_1 c_1 \sin \theta_2}{\rho_2 c_2 \sin \theta_1 + \rho_1 c_1 \sin \theta_2}. \quad (1.7)$$

Le coefficient de transmission de l'onde s'obtient par $T = 1 + R$. Plusieurs cas peuvent se présenter selon la valeur de l'angle de rasance et les propriétés des deux milieux.

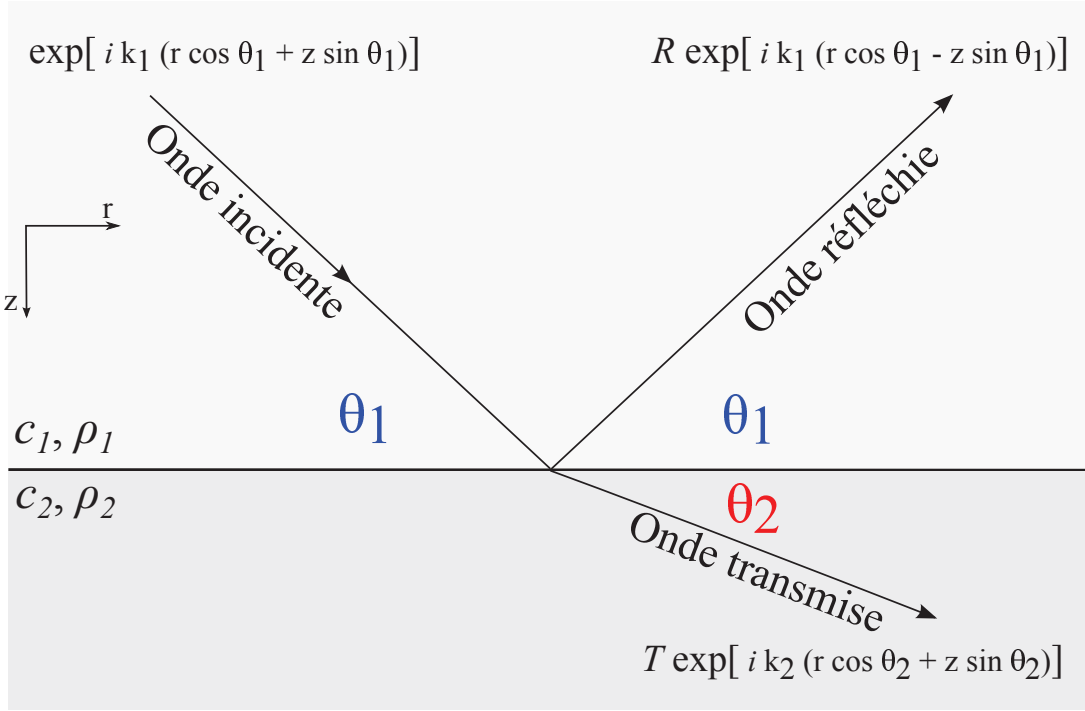


FIGURE 1.4 – Illustration des phénomènes de réflexion et de transmission d’une onde plane au niveau d’une interface entre deux milieux fluides homogènes non absorbants.

Interface eau/air :

La différence de masse volumique entre l’eau (milieu 1) et l’air (milieu 2) est telle que l’on peut supposer que l’air est un fluide de masse volumique nulle ($\rho_2 = 0$). Dans ce cas, on obtient un coefficient de transmission nul et un coefficient de réflexion égal à -1 , ce qui signifie qu’aucune énergie n’est transmise de l’eau vers l’air. Les ondes réfléchies sont simplement déphasées de π .

Interface eau/fond :

Dans la majorité des cas, la célérité dans le fond (milieu 2) est supérieure à la célérité dans l’eau (milieu 1). Il existe alors un angle de rasance en dessous duquel la réflexion est totale ($|R| = 1$, il n’y a pas d’onde transmise) et au dessus duquel la réflexion est partielle. Cet angle est appelé angle critique et est donné par

$$\theta_c = \arccos\left(\frac{c_1}{c_2}\right). \quad (1.8)$$

Lorsque l’angle de rasance supérieur à θ_c le coefficient de réflexion est réel mais son module est inférieur à 1, une partie de l’énergie est transmise au fond. Lorsque l’angle de rasance est inférieur θ_c le coefficient de réflexion est complexe de module égal à 1, il n’y a pas d’onde transmise, l’onde est totalement réfléchi avec un déphasage qui dépend des propriétés du fond. Il existe donc des angles de propagation privilégiés pour les trajets acoustiques : les trajets dont l’angle de rasance est inférieur à l’angle critique pourront se propager sur de longues distances alors que les trajets dont l’angle de rasance est supérieur à l’angle

critique seront rapidement dissipés dans le fond. Plus la différence de célérité entre l'eau et le fond est importante plus l'angle critique est important et moins les trajets pourront être dissipés dans le fond. Dans les cas assez rares où le fond a une célérité moins importante que l'eau, il n'y a pas d'angle critique et tous les trajets sont transmis dans le fond.

En réalité le coefficient de réflexion n'est jamais parfaitement égal à 1 car il faut rajouter l'influence de l'amortissement et d'éventuelles pertes dues à la rugosité de l'interface.

1.2.3 Influence des hétérogénéités

Les hétérogénéités du milieu de propagation acoustique sous-marin interagissent de façon complexe avec les ondes sonores. Elles modifient la phase de l'onde acoustique et peuvent introduire des phénomènes de diffraction et de diffusion. On distingue les hétérogénéités de volume (variations de la célérité du milieu), qui peuvent être causées par des ondes internes par exemple, des irrégularités au niveau des interfaces.

1.2.3.1 Hétérogénéités de volume

Deux paramètres permettant de quantifier les effets des hétérogénéités de volume sur les ondes acoustiques ont été introduit en acoustique sous-marine [Flatté79]. Le paramètre Λ appelé *diffraction parameter* et le paramètre Φ appelé *strength parameter*. Le paramètre Λ quantifie la diffraction que les hétérogénéités engendrent sur l'onde acoustique, si Λ est faible alors la diffraction est faible et l'onde est simplement réfractée, si Λ est élevé alors la diffraction peut être importante.

Le paramètre Φ quantifie la force des hétérogénéités. Pour une propagation horizontale dans un milieu où les hétérogénéités sont isotropes, Λ s'exprime de la façon suivante :

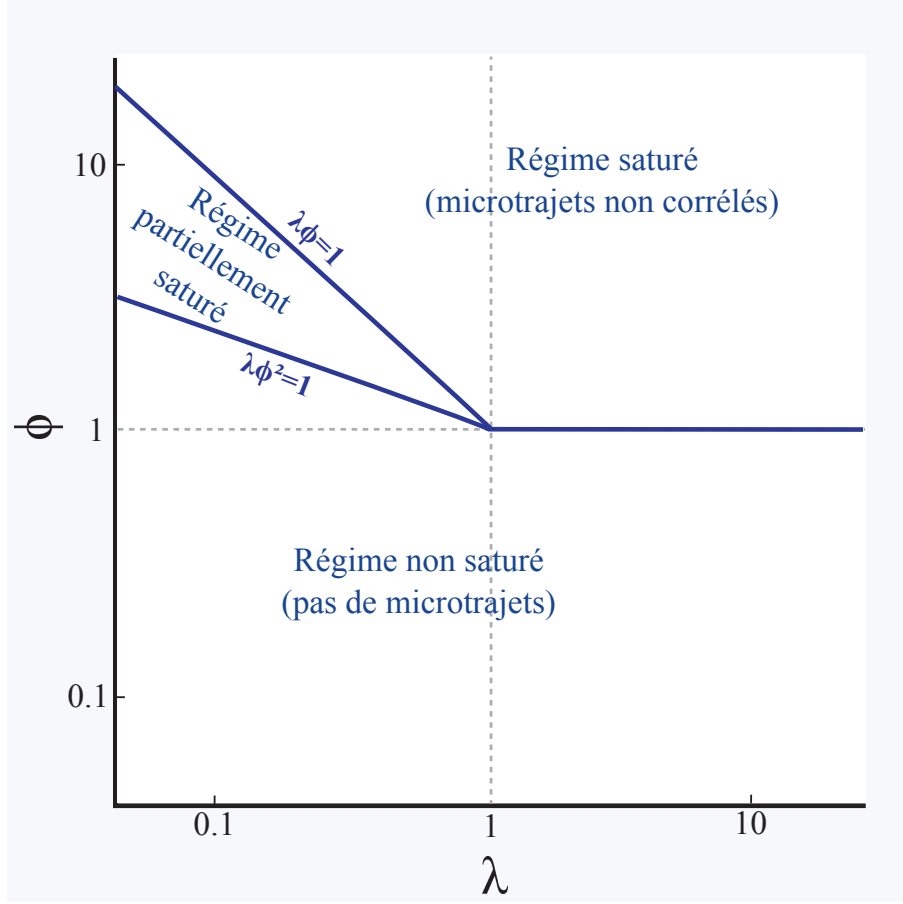
$$\Lambda = \frac{r}{6kL^2}, \quad (1.9)$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ avec λ la longueur d'onde de l'onde acoustique, r est la distance de propagation et L est la longueur de corrélation des hétérogénéités.

Le paramètre Φ s'exprime de la façon suivante :

$$\Phi^2 \approx 0.4k^2 \langle (\delta n)^2 \rangle rL, \quad (1.10)$$

où $\langle (\delta n)^2 \rangle$ est la variance de l'indice de réfraction due aux hétérogénéités de célérité. Ces deux paramètres permettent de délimiter différents régimes de propagation tels qu'illustrés sur la figure 1.5. Dans la région saturée, chaque trajet acoustique se sépare en un nombre aléatoire de microtrajets sous l'effet de la diffraction par les hétérogénéités. Dans la région non saturée les trajets sont peu altérés, il n'y a pas de microtrajets. Entre ces deux régions se trouve une région intermédiaire où des microtrajets se forment mais gardent une certaine cohérence. Ces régions ont récemment été raffinées par Colosi [Colosi15].

FIGURE 1.5 – Différents régimes de propagation dans l'espace $\Lambda - \Phi$ [Flatté79].

1.2.3.2 Irrégularités de surface et de fond

Lorsque les interfaces ne sont pas totalement planes, une partie de l'onde incidente est réfléchiée dans la direction spéculaire (direction de l'onde réfléchiée avec une surface plane) et une partie de l'onde est diffusée dans toutes les directions comme illustré sur la figure 1.6. La rugosité des irrégularités de surface et de fond est caractérisée d'un point de vue acoustique par le paramètre de Rayleigh [Jensen11] :

$$\Gamma = 2k\delta \sin(\theta), \quad (1.11)$$

où $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ avec λ la longueur d'onde de l'onde acoustique, δ est l'écart-type des irrégularités et θ est l'angle de rasance de l'onde acoustique avec l'interface. Quand $\Gamma \ll 1$, la plus grande partie de l'onde incidente est réfléchiée dans la direction spéculaire. Quand $\Gamma \gg 1$, l'interface se comporte comme un diffuseur, l'énergie est diffusée dans toutes les directions. Pour prendre en compte, l'énergie perdue dans la partie diffuse on peut définir un coefficient de réflexion modifié pour la réflexion dans la direction spéculaire :

$$\tilde{R}(\theta) = R(\theta) \exp\left(-\frac{\Gamma^2}{2}\right), \quad (1.12)$$

où $R(\theta)$ est le coefficient pour une interface plane.

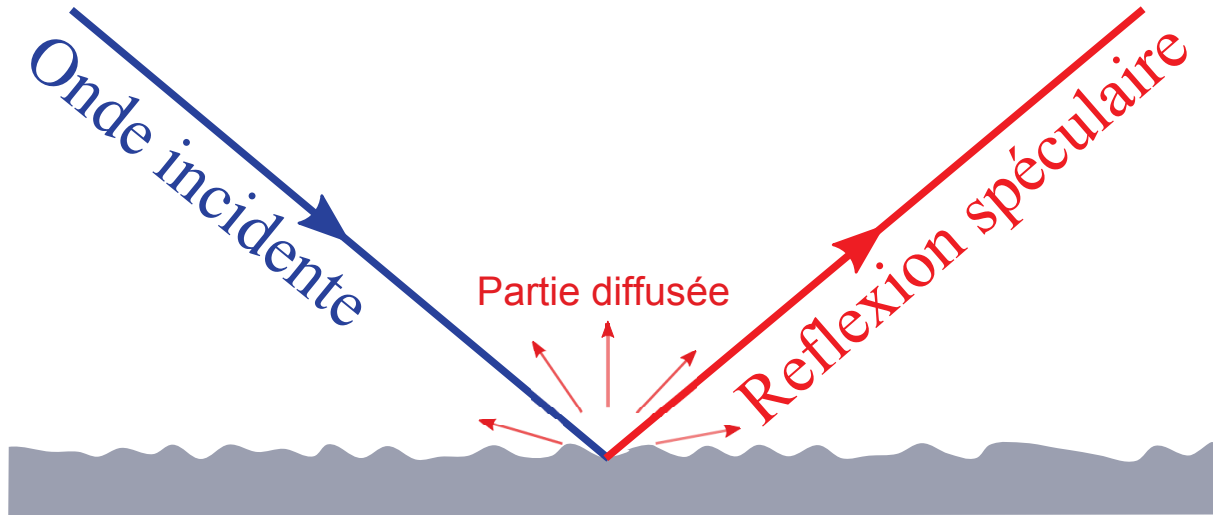


FIGURE 1.6 – Illustration du phénomène de réflexion et de diffusion sur une interface irrégulière.

1.2.4 Divergence géométrique

Une onde acoustique se répartit sur une surface qui peut augmenter au fur et à mesure que l'onde s'éloigne de la source. L'énergie par unité de surface de l'onde acoustique diminue alors au cours de la propagation. Ce phénomène est appelé divergence géométrique. Dans le cas d'une source omnidirectionnelle en champ libre par exemple, l'énergie totale de l'onde émise se répartit sur une sphère de surface $4\pi r^2$ (on parle alors d'onde sphérique) et l'énergie par unité de surface diminue alors en r^2 ce qui correspond à une décroissance en $1/r$ de l'amplitude de l'onde acoustique. Dans l'océan, les ondes acoustiques sont réfléchies ou réfractées et se propagent donc horizontalement. L'énergie se répartit sur un cylindre dont la surface augmente linéairement avec r . L'amplitude de l'onde acoustique décroît alors en $1/\sqrt{r}$.

En plus des pertes par amortissement et fuite dans le fond il y a donc des pertes en $1/\sqrt{r}$ par divergence géométrique.

1.3 Modélisation acoustique : théorie des modes

Un grand nombre de recherches ont été consacrées au développement de techniques permettant de calculer avec précision le champ acoustique dans les guides d'onde océanique. Le champ acoustique peut être calculé en utilisant la théorie des rayons, la théorie des modes, l'équation parabolique ou encore des méthodes d'éléments finis [Jensen11]. La théorie des rayons et la théorie des modes présentent l'avantage de reposer sur des concepts physiques qui permettent de comprendre les phénomènes de propagation et sont assez largement utilisées pour calculer et modéliser le champ acoustique. La théorie des

rayons repose sur la modélisation très intuitive du champ acoustique comme une somme de rayons acoustiques analogues aux trajets acoustiques présentés dans la section précédente. Elle s'appuie sur une approximation géométrique valide uniquement en hautes fréquences et est donc limitée lorsqu'il s'agit de modéliser le champ acoustique aux basses fréquences (< 1 kHz typiquement) où les phénomènes de nature ondulatoire sont importants. La théorie des modes est valide pour les hautes comme les basses fréquences mais s'applique de manière plus pratique aux basses fréquences. Les problèmes inverses étudiés dans ce manuscrit considèrent des sources acoustiques basses fréquences. On présente donc ici la théorie des modes.

1.3.1 Équation d'onde et conditions limites aux interfaces

Quelle que soit la méthode utilisée, le calcul du champ acoustique passe par la résolution de l'équation d'onde pour la pression p . En coordonnées cylindriques ou la distance est notée r et la profondeur notée z , l'équation d'onde en l'absence de source s'écrit :

$$\nabla^2 p(r, z, t) - \frac{1}{c^2(r, z)} \frac{\partial^2 p(r, z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1.13)$$

où ∇^2 est l'opérateur Laplacien et $c(r, z)$ est la célérité du milieu de propagation. Cette équation se résout plus simplement dans le domaine fréquentiel pour une onde monochromatique $p(r, z, t) = p(r, z) \exp(-j\omega t)$. On obtient alors l'équation de Helmholtz

$$\nabla^2 p(r, z) + k^2(r, z)p(r, z) = 0, \quad (1.14)$$

où $k(r, z) = \omega/c(r, z)$. Notons que le champ de pression $p(r, z)$ et le nombre d'onde $k(r, z)$ dépendent de ω . Cette dépendance est omise par soucis de clarté. Pour une source ponctuelle à une profondeur $z = z_s$, le calcul du champ acoustique passe par la résolution de l'équation de Helmholtz suivante

$$\nabla^2 p(r, z) + k^2(r, z)p(r, z) = -\frac{\delta(r)\delta(z - z_s)}{2\pi r}. \quad (1.15)$$

L'équation d'onde et donc l'équation de Helmholtz sont valides dans les milieux où la densité ne comporte pas de discontinuités. Les discontinuités de densité aux interfaces sont donc gérées comme des conditions limites. On considère généralement que la surface de l'océan est parfaitement réfléchissante, ce qui impose la condition limite de pression suivante à la surface

$$p = 0, \quad (1.16)$$

et que la pression et la vitesse sont continues à l'interface avec le fond

$$p_1 = p_2, \quad (1.17)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z}. \quad (1.18)$$

Les différences entre les différentes techniques de calcul du champ acoustique résident dans la manière de résoudre cette équation et de gérer les conditions limites aux interfaces. Il faut noter que la théorie des rayons et l'équation parabolique cherchent une solution approximative à cette équation alors que la théorie des modes cherche une solution exacte dans un milieu où les propriétés ne dépendent pas de la distance ($k(r, z) = k(z)$). On qualifie ces milieux de *range-independent* dans la littérature anglophone et nous garderons cette formulation pour désigner ces milieux, on qualifiera aussi de *range-dependent* les milieux qui à l'inverse varient avec la distance.

1.3.2 Théorie des modes

La théorie des modes cherche une solution à l'équation de Helmholtz en utilisant la technique de séparation de variable. La solution recherchée est de la forme $p(r, z) = \Psi(z)\Phi(r)$. On peut montrer que le problème se formule alors de la façon suivante [Jensen11] :

$$p(r, z) = \frac{j}{4\rho(z_s)} \sum_n \Psi_n(z_s)\Psi_n(z)H_0^1(k_{rn}r), \quad (1.19)$$

où les quantités k_{rn} et $\Psi_n(z)$ dépendent de ω et sont obtenues par résolution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \Psi_n(z)}{\partial z^2} + \left(\left(\frac{\omega}{c(z)} \right)^2 - k_{rn}^2 \right) \Psi_n(z) = 0, \quad (1.20)$$

en respectant les conditions limites aux interfaces. C'est un problème classique de Sturm-Liouville pour lequel il existe une quantité infinie mais discrète de solutions indexées suivant $n \in \mathbb{N}$. Chaque terme de la somme dans l'équation (1.19) correspond à un mode de propagation. Les fonctions $\Psi_n(z)$ sont analogues aux modes de vibration d'une corde vibrante et sont appelées *fonctions modales*. Ces fonctions forment une base orthonormale. Les constantes k_{rn} sont représentatives de la propagation suivant r et sont appelées *nombre d'onde horizontaux*. La fonction H_0^1 est une fonction de Hankel du premier ordre et possède le développement asymptotique suivant pour $k_{rn}r \gg 1$

$$H_0^1(k_{rn}r) \simeq \left(\frac{2}{\pi k_{rn}r} \right)^{1/2} \exp(j(k_{rn}r - \pi/4)). \quad (1.21)$$

Cette approximation est classiquement valable pour des distances supérieures à quelques hauteurs d'eau. Par convention, les termes de la somme (1.19) sont ordonnancés par ordre de k_{rn}^2 décroissants. Il faut noter qu'à partir d'un certain rang N , les k_{rn}^2 sont négatifs ce qui signifie que les nombre d'onde horizontaux sont imaginaires purs. Les termes $\exp(jk_{rn}r)$ sont alors exponentiellement décroissants avec la distance. Ces modes sont dits *évanescents* car ils s'atténuent rapidement avec la distance. Leur contribution peut être négligée lorsque la distance dépasse quelques hauteurs d'eau. Par opposition, les autres modes sont dits *propagatifs*. Lorsqu'on travaille à des distances suffisamment importantes, le signal de pression peut alors s'exprimer comme une somme de modes propagatifs

$$p(r, z) \simeq Q \sum_{n=1}^{N_{prop}} \Psi_n(z_s)\Psi_n(z) \frac{\exp(jk_{rn}r)}{\sqrt{k_{rn}r}}. \quad (1.22)$$

où $Q = \frac{\exp(j\pi/4)}{\rho(z_s)\sqrt{8\pi}}$. Les nombres d'onde horizontaux des modes propagatifs comportent typiquement une petite partie imaginaire α_n représentative d'une atténuation causée par l'amortissement dans le fond ou par des pertes dues aux irrégularités des interfaces. On peut noter la décroissance en $1/\sqrt{r}$ de la pression dans l'équation (1.22) représentative des pertes par divergence géométrique.

Les quantités k_{rn} et $\Psi_n(z)$ peuvent être calculées de manière analytique dans un guide idéal (guide d'onde dans lequel le fond est parfaitement rigide ou parfaitement réfléchissant et où la célérité et la densité dans la colonne d'eau sont constantes), et de manière semi-analytique dans un guide de Pekeris (guide d'onde dans lequel la célérité et la densité sont constantes dans la colonne d'eau et avec un fond fluide semi-infini ou la célérité et la densité sont également constantes). Dans le cas général, ces quantités doivent être calculées numériquement.

1.3.3 Fonction de transfert

Les calculs précédents supposent une source monochromatique de pulsation $\omega = 2\pi f$ à la profondeur z_s . La pression $p(r, z)$ dépend de ω et représente la fonction de transfert du milieu à la fréquence f . À partir de l'expression de $p(r, z)$ on peut donc définir la fonction de transfert entre une source à une profondeur z_s et un récepteur en z_r séparés d'une distance r_s :

$$h(f, r_s, z_s, z_r) = Q \sum_{n=1}^{N_{prop}} \Psi_n(f, z_s) \Psi_n(f, z_r) \frac{e^{jk_{rn}(f)r_s}}{\sqrt{k_{rn}(f)r_s}}. \quad (1.23)$$

Cette fonction de transfert est souvent appelée *fonction de Green* en acoustique sous-marine. Pour une source de spectre $s(f)$ à la profondeur z_s , la pression $p(r_s, z_s, f)$ reçue à la profondeur z_r après propagation sur une distance r_s est alors donnée par

$$p(r_s, z_s, f) = s(f)h(f, r_s, z_s, z_r). \quad (1.24)$$

1.3.4 Interprétation physique et types de modes

Un mode peut être vu comme une onde plane se propageant dans le guide d'onde avec un nombre d'onde horizontal k_{rn} et un nombre d'onde vertical $k_{zn}(z)$ tel que

$$k(z) = \frac{\omega}{c(z)} = \sqrt{(k_{rn}^2 + k_{zn}^2(z))}. \quad (1.25)$$

Un angle de propagation modal θ_n par rapport à l'horizontal représentatif de la direction de propagation du mode dans le guide d'onde peut alors être défini par :

$$\theta_n = \arccos \left(\frac{k_{rn}}{k(z)} \right). \quad (1.26)$$

Cette représentation permet une compréhension intuitive des phénomènes de propagation modale en réalisant l'analogie avec la propagation sous forme de trajets acoustiques. On parle d'analogie modes/rayons : un mode est vu comme un rayon acoustique d'angle de propagation θ_n . Le lien rigoureux entre modes et rayons est bien entendu beaucoup plus complexe, néanmoins des arguments plus formels permettent par exemple de décrire un mode comme le résultat de l'interférence de rayons d'angles de propagation proches de l'angle θ_n [Tindle81], ce qui valide en quelque sorte l'analogie modes/rayon pour l'analyse qualitative de la propagation des modes.

Dans la section 1.2.1 nous avons vu que l'on pouvait classer les trajets acoustiques selon les caractéristiques de leur propagation (réfléchi surface et fond, totalement réfracté...). Par analogie, on peut également classer les modes selon les mêmes caractéristiques. Prenons par exemple un guide d'onde océanique dans lequel la célérité dans la colonne d'eau est comprise entre c_{eaumin} et c_{eaumax} . Si $\frac{\omega}{c_{eaumax}} < k_{rn} < \frac{\omega}{c_{eaumin}}$, il existe une profondeur z pour laquelle $k_{rn} = \frac{\omega}{c(z)}$, ce qui signifie qu'à cette profondeur l'angle de propagation du mode θ_n vaut 0 et que le mode se propage à l'horizontal. Tout comme un rayon acoustique dont l'angle de propagation devient horizontal à une certaine profondeur dans la colonne d'eau, le mode peut être considéré comme réfracté dans la colonne d'eau. Les profondeurs pour lesquelles l'angle θ_n devient nul sont appelés *points de retournement*. Si $k_{rn} < \frac{\omega}{c_{eaumax}}$, il n'y a pas de point de retournement dans la colonne d'eau et le mode peut être considéré comme étant réfléchi surface et fond.

D'autre part, les modes propagatifs ont des nombres d'onde horizontaux tels que $\frac{\omega}{c_{max}} < k_{rn} < \frac{\omega}{c_{min}}$ ou c_{min} et c_{max} sont respectivement les célérités minimales et maximales dans le guide d'onde. Tous les nombres d'ondes $k_{rn} < \frac{\omega}{c_{min}}$ sont pour des modes évanescents. Ces nombres d'ondes correspondent à des angles θ_n supérieurs à l'angle critique défini dans la section 1.2.2, ce qui indique que les ondes acoustiques transmises dans le fond constituent au moins une partie des modes évanescents.

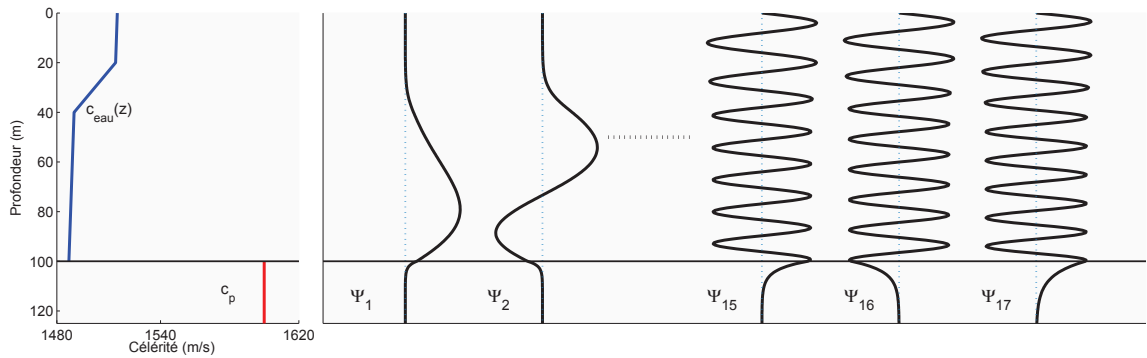


FIGURE 1.7 – Fonctions modales à 370 Hz dans un guide d'onde océanique petit fond avec un profil de célérité comportant une thermocline. Les deux premières et trois dernières fonctions modales des modes propagatifs sont représentées.

La figure 1.7 illustre quelques fonctions modales dans un guide d'onde océanique petit fond avec un profil de célérité comportant une thermocline. Ce type de guide d'onde fait apparaître deux types de modes, des modes réfléchis sur le fond et réfractés dans

la thermocline et des modes réfléchis sur le fond et la surface. Les deux premiers modes représentés sur la figure 1.7 sont réfractés, leurs fonctions modales ont une amplitude qui tend vers zéro dans la partie haute du profil de célérité ce qui signifie qu'ils ne se propagent pas ou peu dans cette partie du guide d'onde. On peut faire l'analogie avec des trajets acoustiques qui seraient également réfractés et ne se propageraient pas non plus dans cette partie du guide d'onde. Les trois derniers modes représentés sont réfléchis au niveau du fond et de la surface car les fonctions modales couvrent toute la colonne d'eau. On peut noter sur cette figure que les fonctions modales ne sont pas nulles dans le fond. L'amplitude modale dans le fond est représentative de la pénétration de l'onde acoustique dans le fond. Les modes d'ordre élevé pénètrent plus dans le fond que les modes d'ordre faible. Ces comportements s'appréhendent bien en analysant les angles de propagation des modes. Plus l'ordre du mode est élevé plus k_{rm} est faible et donc plus l'angle de propagation du mode est proche de la verticale. Ainsi, plus l'ordre du mode est élevé moins il pourra être réfracté dans la colonne d'eau mais plus il interagira avec le fond.

1.3.5 Adaptation aux milieux range-dependent

La théorie des modes telle que présentée précédemment s'applique uniquement à des guides d'onde range-independent. Pour calculer le champ acoustique dans un milieu range-dependent en utilisant la théorie des modes il faut faire quelques approximations.

modes adiabatiques

Dans le cas où les variations sont faibles (typiquement une pente de quelques pourcents dans le fond ou un profil de célérité moyen qui évolue graduellement sur des distances de quelques centaines de mètres), on peut faire l'hypothèse qu'il n'y a pas d'échange d'énergie entre les modes d'une distance r à l'autre. C'est l'hypothèse de couplage adiabatique. Cette hypothèse revient à considérer qu'il n'y pas trop de diffraction dues aux variations selon la distance. Le champ acoustique s'exprime alors par

$$p(r, z) \simeq Q \sum_{n=1}^{N_{prop}} \hat{\Psi}_n(r=0, z_s) \hat{\Psi}_n(r, z) \frac{\exp(j\hat{k}_{rn}r)}{\sqrt{k_{rn}r}}. \quad (1.27)$$

La quantité \hat{k}_{rn} désigne le nombre d'onde horizontal moyen de la source jusqu'au récepteur

$$\hat{k}_{rn} = \frac{1}{r} \int_0^r k_{rn}(r') dr', \quad (1.28)$$

ou $k_{rn}(r')$ est le nombre d'onde horizontal pour un guide d'onde range-independent dont les propriétés sont les propriétés locales du guide range-dependent en $r = r'$. La fonction $\hat{\Psi}_n(r, z)$ est la fonction modale pour un guide d'onde range-independent dont les propriétés sont les propriétés locales du guide range-dependent en r .

Le champ acoustique obtenu par l'approximation adiabatique est donc représentatif des conditions de propagation au niveau de l'émetteur et du récepteur, et des conditions moyennes de propagation entre les deux.

modes couplés

La théorie des modes couplés est une adaptation de la théorie des modes qui permet de prendre en compte des milieux fortement range-dependent, comme les milieux comportant un champ de célérité variable du fait des ondes internes ou un milieu comportant une surface irrégulière. Il s'agit d'une solution approchée de l'équation d'onde en supposant que le champ de pression peut s'exprimer comme une somme de modes :

$$p(r, z) = \sum_{n=1}^{N_{prop}} \frac{a_n(r)\phi_n(z)}{\sqrt{k_n r}}. \quad (1.29)$$

Comme les hétérogénéités considérées sont souvent aléatoires, la théorie des modes couplés est généralement utilisée sous un angle statistique. Les statistiques du champ de pression s'expriment en fonction des statistiques sur les amplitudes $a_n(r)$. Les travaux effectués par Creamer et Colosi permettent de mettre en équation des statistiques sur $a_n(r)$ en fonction d'une quantité appelée matrice de diffusion (*scattering matrix* en anglais) [Creamer96], [Colosi09]. Ces matrices de diffusion ont été déterminées analytiquement pour les ondes internes suivant le spectre de Garrett et Munk, et pour des ondes de surface suivant le spectre de Pierson-Moskowitz [Raghukumar13, Raghukumar15]. La théorie développée permet d'obtenir le champ de pression moyen, l'intensité moyenne, l'indice de scintillation et la fonction d'autocorrélation en r du champ de pression.

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons d'abord présenté l'environnement océanique en tant que milieu de propagation des ondes acoustiques puis nous avons décrit l'influence de cet environnement sur la propagation. La théorie des modes qui permet de calculer le champ acoustique a ensuite été introduite. Cette théorie est adaptée au contexte de notre étude, c'est à dire à la modélisation de la propagation des basses fréquences en champ lointain dans les milieux petits fonds. Elle modélise le champ acoustique comme une somme de modes. Nous avons également présenté une interprétation physique des modes qui sera utile dans les chapitres 4 et 5. L'ensemble de ces considérations constitue le modèle direct qui permet de modéliser le champ acoustique dans l'océan. Dans la pratique, ce problème est très délicat car la connaissance de l'environnement océanique est limitée. Il est impossible de connaître l'environnement de façon précise (profondeur, célérité dans l'eau, dans le fond). Pour modéliser la propagation, on fait généralement des hypothèses simplificatrices et erronées sur l'environnement. Nous verrons dans le chapitre suivant que ces erreurs induisent des difficultés lors de la résolution du problème inverse.

Chapitre 2

Problème inverse : Matched-field processing

Sommaire

2.1	Formulation du problème	34
2.1.1	Configurations pratiques	34
2.1.1.1	Sources	35
2.1.1.2	Réception	36
2.1.2	Modèle du signal reçu	37
2.2	Estimation au sens du maximum de vraisemblance	39
2.2.1	Principe	40
2.2.2	Fonctions de coût	41
2.2.2.1	Modèle stochastique	41
2.2.2.2	Modèle déterministe	42
2.2.3	Implémentation numérique	43
2.3	Approche bayésienne	44
2.3.1	Principe	44
2.3.2	Gestion des paramètres de nuisance	45
2.3.3	Implémentation numérique	46
2.4	Limitations du matched-field processing	46
2.4.1	Bruit	47
2.4.2	Problème des inadéquations	47
2.5	Conclusion	48

Le champ acoustique se propageant dans le guide d'onde océanique est porteur d'information sur les paramètres de la source (position, vitesse...) et du milieu de propagation (profondeur d'eau, célérité dans la colonne d'eau, propriétés géoacoustiques du fond...). La mise au point de techniques permettant de calculer avec précision le champ de pression acoustique dans les guides d'onde océaniques a permis de développer des méthodes d'inversion dites de *Matched-field processing* (MFP) pour l'estimation de paramètres d'intérêts à partir de mesures du champ acoustique. L'inversion par MFP consiste à comparer le champ de pression mesuré avec le champ de pression issu d'un modèle de propagation afin de trouver les valeurs des paramètres qui apportent la plus grande similitude entre les deux champs. Les prémices du MFP remontent au début des années 1970 avec les travaux de Hinich [Hinich73] dans lesquels une représentation modale du champ acoustique est utilisée pour estimer la profondeur de la source. Le concept du MFP est formellement introduit en 1976 par Bucker [Bucker76] dans le but d'estimer la profondeur et la distance d'une source. Depuis, les méthodes d'estimation par MFP ont été largement développées et utilisées en acoustique sous-marine [Porter87, Ozard89, Hermand96, Dosso02b, Yardim12], donnant lieu à un grand nombre de publications dont des revues de littérature assez anciennes [Tolstoy93, Baggeroer93] et quelques articles plus récents de réflexions sur les perspectives du MFP [Chapman12, Baggeroer13].

Ce chapitre décrit la méthode du MFP pour la résolution des problèmes inverses en acoustique sous-marine. Le MFP y est présenté comme un problème d'estimation au sens du maximum de vraisemblance ainsi que dans un cadre bayésien. Une attention particulière est portée aux limitations de ce type de méthodes en fin de chapitre.

2.1 Formulation du problème

2.1.1 Configurations pratiques

La configuration classique des applications de MFP est illustrée sur la figure 2.1. Le MFP utilise directement les données de pression obtenues à l'aide d'un ensemble de capteurs acoustiques (hydrophones) formant une antenne, et considère une source ponctuelle relativement éloignée dans le guide d'onde (au minimum quelques hauteurs d'eau). Les données mesurées permettent d'estimer les paramètres qui influent sur le champ acoustique : la position de la source (distance, profondeur, et parfois l'azimut) si l'on souhaite localiser la source, et/ou les paramètres environnementaux (profondeur d'eau, célérité dans la colonne d'eau, propriétés géoacoustiques du fond...) dans des applications de tomographie ou d'inversion géoacoustique. Au delà de ce cadre applicatif simple, les applications du MFP présentent une grande variété de configurations expérimentales dépendant des sources acoustiques utilisées ainsi que du nombre et de l'arrangement des capteurs pour la réception du signal acoustique.

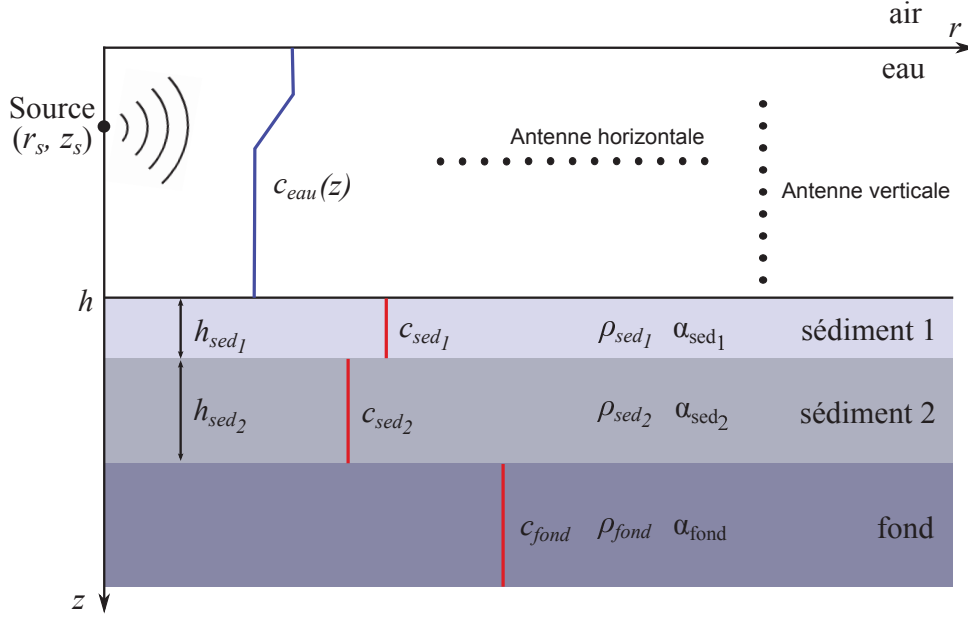


FIGURE 2.1 – Configuration classique du MFP : une source ponctuelle émet une onde acoustique dans le guide d’onde océanique et des mesures acoustiques sont réalisées à l’aide d’une antenne dans le but d’estimer des paramètres qui influent sur le champ acoustique (position de la source, hauteur d’eau, célérité dans l’eau, paramètres géoacoustiques).

2.1.1.1 Sources

On peut faire la distinction entre les sources d’opportunités qui sont utilisées parce que leur signal est reçu et détecté sur l’antenne, et les sources dédiées à l’application de MFP visée. L’exploitation de sources d’opportunité relève des applications de l’acoustique passive et vise à localiser la source et/ou estimer les paramètres environnementaux. Les sources dédiées sont expressément mise en place dans le but de réaliser des expériences de tomographie et/ou d’inversion géoacoustique. Par opposition on parle d’acoustique active.

Sources d’opportunités (acoustique passive)

Parmi les sources d’opportunités, on retrouve les sources anthropogéniques que sont les navires et les sous-marins. Le signal rayonné par les navires et les sous-marins est majoritairement basses fréquences (entre 10 Hz et 1 kHz) et est constitué de la combinaison d’un bruit large bande et d’un ensemble raies spectrales [Bush46, Arveson00, McKenna12, Oudompheng13]. La détection et la localisation discrète par acoustique passive de ce type de source répond à des problématiques de défense et demeure un objectif prioritaire du MFP depuis ses débuts. L’utilisation des navires comme source d’opportunité se présente également comme une solution peu intrusive et respectueuse de la faune marine pour la tomographie et l’inversion géoacoustique. Cette approche a fait l’objet de nombreux travaux ces dernières années (en utilisant la méthode du MFP ou bien d’autres techniques) [Mecklenbrauker01, Battle03, Heaney04, Nicholas04, Tollefsen08, vanLeijen09, Stotts10, Gervaise12, Ren13].

Les cétacés peuvent aussi constituer des sources d’opportunité pour le MFP. Les cétacés utilisent une grande diversité de sons pour communiquer, se localiser dans la colonne d’eau, localiser des obstacles ou encore chasser. Ces sons peuvent se classer en deux catégories : les modulations de fréquences et les impulsions. Les gammes de fréquence occupées peuvent être très variables d’une espèce à une autre. Les signaux basses fréquences (entre 10 Hz et 1 kHz) émis par certains de ces mammifères marins se propagent sur de longues distances et peuvent être utilisés dans les applications du MFP [Thode00, Thode06, Bonnel08, Newhall12, Abadi14, Bonnel14b]. La détection et la localisation passive des mammifères marins fournit des informations précieuses aux biologistes et bioacousticiens qui étudient ces espèces. Par ailleurs, l’utilisation des cétacés comme sources d’opportunité se présente également comme une solution peu intrusive pour la tomographie et l’inversion géoacoustique.

Sources dédiées (acoustique active)

Des sources basses fréquences (entre 10 Hz et 1 kHz) diverses et variées peuvent être mises en place pour des expériences de tomographie et d’inversion géoacoustique [Tang07]. On retrouve classiquement des sources harmoniques (raies spectrales), des modulations de fréquence et des impulsions. Les impulsions basses fréquences peuvent être obtenues à l’aide d’un airgun ou encore de manière plus insolite en faisant imploser une ampoule. Ces sources peuvent également servir de sources d’opportunités si leur signal est intercepté de manière fortuite.

2.1.1.2 Réception

Deux grands types d’antennes de réception sont classiquement utilisées pour le MFP : les antennes verticales et les grandes antennes horizontales (cf figure 2.1).¹ Ces antennes fournissent un échantillonnage mono-dimensionnel du champ acoustique.

Antenne verticale

Les antennes verticales permettent d’échantillonner le champ acoustique selon la profondeur sur une partie ou sur la totalité de la colonne d’eau. Ce sont généralement soit des antennes fixes ancrées au fond par un lest et tirées vers la surface à l’aide de flotteurs, soit des antennes dérivantes avec une bouée en surface et tirées vers le fond par un lest. Ces antennes peuvent présenter une légère inclinaison horizontale du fait des courants marins. Les meilleures performances sont obtenues quand l’antenne couvre toute la colonne d’eau et que le nombre de capteur est supérieur au nombre de modes propagatifs car tous les modes sont alors correctement résolus.

Antenne horizontale

Les antennes horizontales permettent d’échantillonner le champ acoustique selon la distance. Ce sont généralement soit des antennes tractées par des navires ou des sous-marins, soit des antennes fixées sur le fond océanique. Les antennes tractées présentent

1. bien entendu d’autres types d’antennes existent (antennes surfaciques, volumiques...) mais leur utilisation est moins répandue ou moins adaptée au MFP

un certain avantage opérationnel en termes de mobilité par rapport aux autres types d'antenne. Elles peuvent cependant présenter une légère inclinaison verticale à cause du poids de l'antenne.

L'échantillonnage du champ acoustique à l'aide de plusieurs capteurs donne la diversité spatiale souvent nécessaire aux méthodes de MFP. C'est cette diversité spatiale qui est utilisée lors de la comparaison des données mesurées avec les données simulées. Si le signal source le permet, on peut cependant se passer de cette diversité spatiale et utiliser un seul capteur pour réaliser l'inversion. Dans le cas où le signal source est de type impulsionnel ou court en temps, on peut extraire les modes du guide d'onde et recourir à l'aide d'un seul capteur à une variante du MFP appelée *matched-mode processing* (MMP) [Chen92, Chen02, Le Touzé07, Le Touzé09, Le Touzé08]. Nous reviendrons sur cette méthode au chapitre 5.

2.1.2 Modèle du signal reçu

Si la source émet de façon continue ou de façon répétée dans le temps, le signal temporel reçu au niveau de l'antenne peut être découpé en plusieurs échantillons temporels successifs appelés *observations* (*snapshots* dans la littérature anglophone). Le signal est analysé dans le domaine fréquentiel après transformée de Fourier à court terme de chacune des observations. Plusieurs fréquences peuvent être utilisées pour l'inversion si la source émet sur différentes fréquences (c'est le cas des sources large bande ou des sources produisant plusieurs composantes monochromatiques). Soit N le nombre d'hydrophones sur lesquels on mesure le champ de pression et $\boldsymbol{\theta}$ le jeu de paramètres inconnus que l'on souhaite estimer, pour chaque observation l et chaque fréquence f_m , le signal mesuré sur l'antenne peut être modélisé par le vecteur complexe de taille $N \times 1$ suivant

$$\mathbf{y}_l(f_m) = s_l(f_m) \cdot \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{w}_l(f_m), \quad l = 1, \dots, L, \quad m = 1, \dots, M \quad (2.1)$$

où,

- M est le nombre de fréquences f_m disponibles pour chacune des L observations l .
- $s_l(f_m)$ est un scalaire complexe représentant l'amplitude et la phase de la source.
- $\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})$ est un vecteur complexe de taille $N \times 1$ représentant la fonction de transfert du guide d'onde à la fréquence f_m pour la propagation entre la source et chacun des N récepteurs de l'antenne. Cette fonction de transfert est appelée *fonction de Green* et peut être calculée comme présenté dans le chapitre 1. Elle dépend de façon non linéaire des paramètres $\boldsymbol{\theta}$.
- $\mathbf{w}_l(f_m)$ est un vecteur complexe de taille $N \times 1$ représentant un bruit gaussien à moyenne nulle, circulaire-symétrique indépendant du signal source. Il est supposé blanc en fréquence et en temps et possède une matrice de covariance spatiale définie positive $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{w}}(f_m) = \sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) \mathbf{C}_{\mathbf{w}}(f_m)$. Autrement dit :

$$\begin{aligned} E \left[\mathbf{w}_{l_1}(f_{m_1}) \mathbf{w}_{l_2}^H(f_{m_2}) \right] &= \sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_1}) \mathbf{C}_{\mathbf{w}}(f_{m_1}) \delta_{l_1, l_2} \delta_{f_{m_1}, f_{m_2}}, \\ E \left[\mathbf{w}_{l_1}(f_{m_1}) \mathbf{w}_{l_2}^T(f_{m_2}) \right] &= 0, \quad \forall l_1, l_2, f_{m_1}, f_{m_2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ce modèle s'avère adapté à la représentation du bruit ambiant présent dans l'océan qui résulte du bruit des vagues et de la pluie, du bruit de trafic maritime lointain ou encore du chœur des organismes vivants [Hildebrand09, Kinda13].

Deux modèles de signal source $s_l(f_m)$ différents sont habituellement considérés, à savoir le modèle stochastique (stochastic ou unconditional model dans la littérature anglophone) et le modèle déterministe (deterministic ou conditional model dans la littérature anglophone) :

- **(A1) Modèle stochastique** : Dans le cas du modèle stochastique, le signal source est supposé suivre un processus aléatoire gaussien circulaire-symétrique à moyenne nulle de densité spectrale de puissance $\sigma_s^2(f)$. De plus, ce processus est supposé stationnaire blanc dans le temps et en fréquence, autrement dit :

$$E [s_{l_1}(f_{m_1})s_{l_2}^H(f_{m_2})] = \sigma_s^2(f_{m_1})\delta_{l_1,l_2}\delta_{f_{m_1},f_{m_2}},$$

$$E [s_{l_1}(f_{m_1})s_{l_2}^T(f_{m_2})] = 0, \forall l_1, l_2, f_{m_1}, f_{m_2}. \quad (2.3)$$

Ce modèle est justifié par le grand nombre de phénomènes naturels pouvant être modélisés comme des processus aléatoires gaussiens stationnaires en vertu du théorème central limite. Le bruit large bande des navires entre par exemple dans cette catégorie [Bush46, Nicholas04, Stotts10]. En outre, les fluctuations et la variabilité du milieu de propagation océanique sont parfois si importantes que le signal reçu est rendu aléatoire gaussien même si le signal source était déterministe. Ce phénomène appelé saturation acoustique apparaît pour de grandes distances de propagation et/ou des fréquences élevées [Fredricks05].

- **(A2) Modèle déterministe** : Dans le cas du modèle déterministe, les quantités $s_l(f_m)$, $l = 1 \dots L$, $m = 1 \dots M$ sont considérées comme déterministes. En fonction du degré de connaissance sur la source, ces quantités sont supposées inconnues ou partiellement connues. Il existe de nombreuses sources qui présentent un caractère déterministe ou qui du moins ne présentent pas une distribution gaussienne. Ce modèle de signal est représentatif par exemple des raies spectrales émises par les sous-marins, les bateaux [Bush46, Tollefsen08, vanLeijen09] ou des sources déployées pour la tomographie ou l'inversion géoacoustique [Huang04]. Il est également adapté à la modélisation des vocalises de mammifères marins [Thode00].

La matrice $\mathbf{C}_w(f_m)$ décrivant la corrélation spatiale du bruit est généralement supposée connue, auquel cas la factorisation de cholesky $\mathbf{C}_w(f_m) = \mathbf{L}_w(f_m)\mathbf{L}_w^H(f_m)$ peut être effectuée puisque $\mathbf{C}_w(f_m)$ est définie positive [Golub12], et le problème peut être ramené au cas d'un bruit spatialement blanc en appliquant la transformation suivante

$$\tilde{\mathbf{y}}_l(f_m) = \mathbf{L}_w^{-1}(f_m)\mathbf{y}_l(f_m), \quad \tilde{\mathbf{g}}(f_m, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{L}_w^{-1}(f_m)\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, L, \quad m = 1, \dots, M. \quad (2.4)$$

Un bruit spatialement blanc est ainsi souvent supposé afin de simplifier les développements et analyses diverses. Dans la suite de ce manuscrit nous travaillerons en coordonnées blanchies et supposerons que $\boldsymbol{\Sigma}_w(f_m) = \sigma_w^2(f_m)\mathbf{I}_N$.

L'ensemble des données observées peut être représenté par la concaténation de toutes les observations dans le vecteur suivant

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^T(f_1) \dots \mathbf{y}_1^T(f_m) \dots \mathbf{y}_L^T(f_1) \dots \mathbf{y}_L^T(f_M)]^T. \quad (2.5)$$

2.2 Estimation au sens du maximum de vraisemblance

L'estimation des paramètres d'intérêt θ par les techniques de MFP repose sur la comparaison des mesures y avec le champ acoustique simulé $g(\theta)$. Cette comparaison s'effectue à l'aide d'une fonction appelée *processeur* (*processor* dans la littérature anglophone) qui quantifie l'adéquation entre les mesures et le champ simulé en fonction de θ . Ce processeur représente une fonction de coût qu'il faut optimiser pour obtenir l'estimée. La figure 2.2 décrit schématiquement l'estimation par MFP.

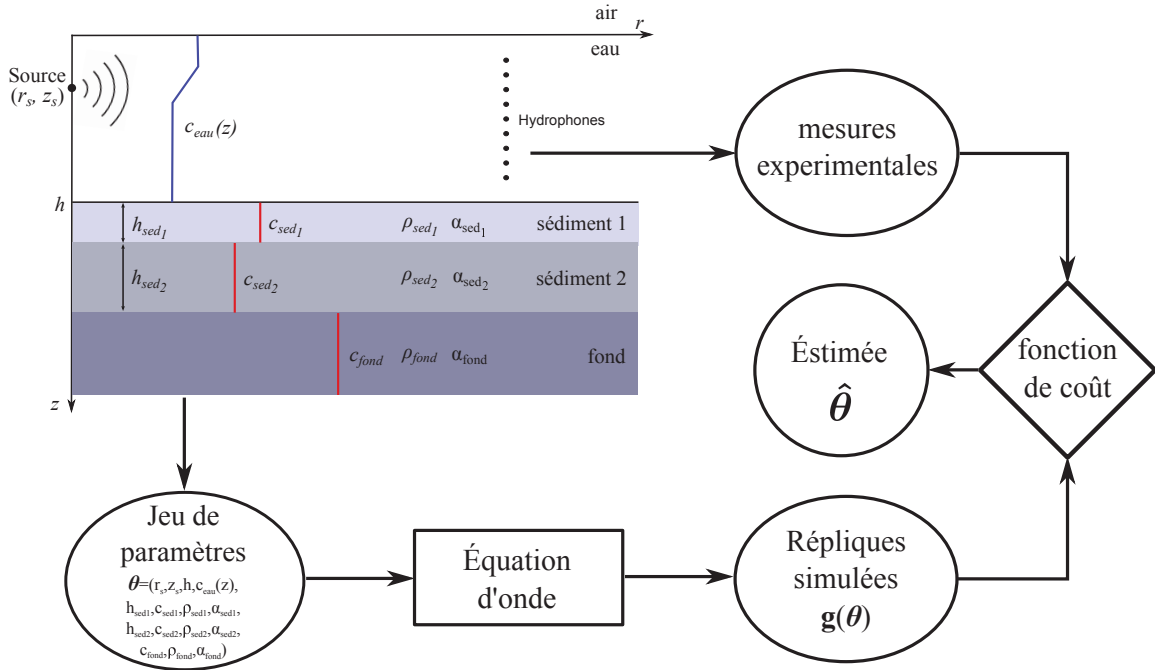


FIGURE 2.2 – Estimation par MFP avec une fonction de coût (processeur).

De nombreux processeurs ont été développés par la communauté acoustique sous-marine. Les premiers processeurs étaient construits de manière *ad-hoc* par analogie avec les méthodes d'estimations alors populaires en traitement d'antenne pour l'estimation de l'angle d'arrivée d'une onde plane. Les estimateurs MFP de Bartlett et de Capon par exemple sont introduits par analogie avec les estimateurs de Bartlett et de Capon classiques. Les années 1990 ont vu le développement empirique d'un grand nombre de processeurs pour répondre aux différents besoins en terme de connaissance sur la source [Westwood92, Michalopoulou96, Orris00, Soares03] avant que des méthodes d'estimation au sens du maximum de vraisemblance (MV) ne soient introduites [Mecklenbräuker00, Dosso02c, Dosso12]. La méthode du maximum de vraisemblance repose sur une représentation statistique du signal et présente l'avantage de donner des estimateurs dont les performances sont souvent optimales (en terme de consistance et d'efficacité) asymptotiquement (en terme de rapport signal à bruit ou de nombre d'observations).

2.2.1 Principe

Nous rappelons ici brièvement le principe de l'estimation au sens du maximum de vraisemblance. Les mesures permettent d'obtenir les observations \mathbf{y} . La probabilité $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ d'obtenir ces observations sachant les paramètres $\boldsymbol{\theta}$ peut être vue comme une mesure de vraisemblance des observations en fonction de $\boldsymbol{\theta}$. La probabilité $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ définie comme une fonction de $\boldsymbol{\theta}$ est appelée fonction de vraisemblance. Plus cette probabilité est importante, plus $\boldsymbol{\theta}$ apparaît comme une solution crédible au problème inverse. Cette notion est illustrée dans le cas scalaire sur la figure 2.3. On considère deux jeux de paramètres possibles $\boldsymbol{\theta}_1$ et $\boldsymbol{\theta}_2$. La probabilité d'observer y est plus importante si les paramètres sont $\boldsymbol{\theta}_1$ que $\boldsymbol{\theta}_2$, le jeu de paramètre $\boldsymbol{\theta}_1$ est donc une solution plus vraisemblable que $\boldsymbol{\theta}_2$.

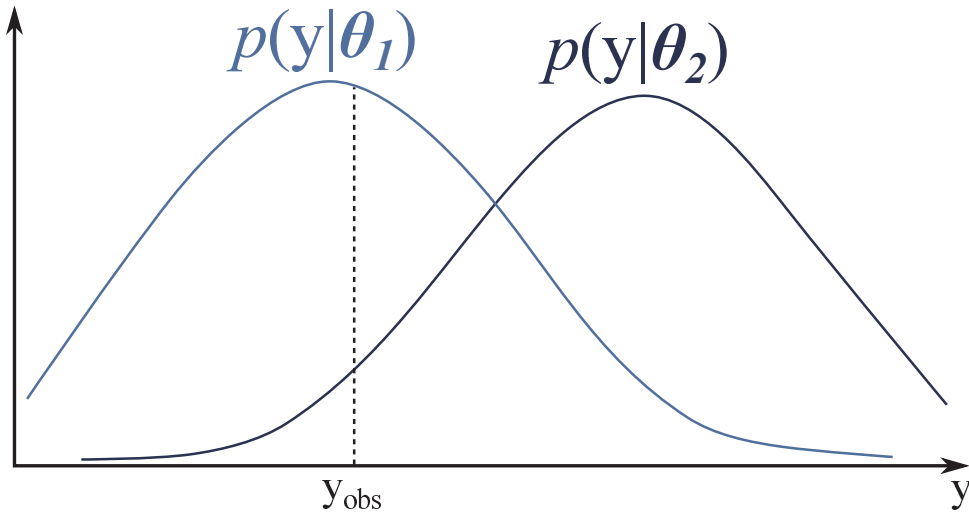


FIGURE 2.3 – Principe de l'estimation au sens du maximum de vraisemblance : la probabilité d'observer y si les paramètres sont $\boldsymbol{\theta}_1$ est plus importante que si les paramètres sont $\boldsymbol{\theta}_2$. Le jeu de paramètres $\boldsymbol{\theta}_1$ est donc une solution plus vraisemblable que $\boldsymbol{\theta}_2$.

L'estimation au sens du maximum de vraisemblance consiste à trouver les paramètres $\boldsymbol{\theta}$ qui maximisent $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MV} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}). \quad (2.6)$$

En pratique, l'estimation revient à optimiser une fonction de coût découlant de la fonction de vraisemblance. Dans la suite, nous présentons le calcul de différentes fonctions de coût pour les différents modèles de signal source présentés dans la partie 2.1.2. Ce sont ces estimateurs dont nous étudierons les performances dans la suite du manuscrit.

2.2.2 Fonctions de coût

2.2.2.1 Modèle stochastique

On considère ici le modèle stochastique **(A1)** défini dans la partie 2.1.2. La densité de probabilité conditionnelle des observations \mathbf{y} sachant $\boldsymbol{\theta}$ s'écrit

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\prod_{m=1}^M \prod_{l=1}^L |\pi \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}}(f_m, \boldsymbol{\theta})|} \prod_{m=1}^M \prod_{l=1}^L \exp(-\mathbf{y}_l^H(f_m) \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}}^{-1}(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{y}_l(f_m)), \quad (2.7)$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}}(f_m, \boldsymbol{\theta})$ est la matrice de covariance de $\mathbf{y}_l(f_m)$ donnée par

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}}(f_m, \boldsymbol{\theta}) = \sigma_s^2(f_m) \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{g}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) + \sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) \mathbf{I}_N. \quad (2.8)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance stochastique (MVS) des paramètres d'intérêt $\boldsymbol{\theta}$ est obtenu en maximisant (2.7) par rapport à $\boldsymbol{\theta}$.

Lorsque les variances $\sigma_s^2(f_m)$ et $\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)$ sont connues, l'estimateur du MVS est [Xu01, Xu11b]

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_{MVS} &= \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} C^{\text{stoc}}(\boldsymbol{\theta}), \\ \text{avec } C^{\text{stoc}}(\boldsymbol{\theta}) &= \left[\sum_{m=1}^M D_1(f_m, \boldsymbol{\theta}) + \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L D_2(f_m, \boldsymbol{\theta}) \cdot |\bar{\mathbf{g}}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{y}_l(f_m)|^2 \right], \end{aligned} \quad (2.9)$$

où $\bar{\mathbf{g}}(f_m, \boldsymbol{\theta})$ est la fonction de Green normalisée définie par $\bar{\mathbf{g}}(f_m, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\|\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})\|}$, et

$$D_1(f_m, \boldsymbol{\theta}) = -L \ln(\sigma_s^2(f_m) \|\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})\|^2 + \sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)), \quad (2.10)$$

$$D_2(f_m, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\sigma_s^2(f_m) \|\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})\|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) (\sigma_s^2(f_m) \|\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})\|^2 + \sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m))}. \quad (2.11)$$

Cette expression est parfois approximée par l'expression simplifiée [Xu01, Xu04b, Xu06]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MVS} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L |\bar{\mathbf{g}}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{y}_l(f_m)|^2, \quad (2.12)$$

en supposant que la norme de la fonction de Green varie peu avec $\boldsymbol{\theta}$ (hypothèse pas toujours vérifiée) et que les variances ne dépendent pas de la fréquence. Cette expression présente l'avantage de faire disparaître les termes de variance qui sont en général peu ou pas connus. On perd cependant les propriétés d'optimalité de l'estimateur du MV. D'autres estimateurs du MVS peuvent être obtenus si les variances $\sigma_s^2(f_m)$ et/ou $\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)$ sont inconnues en traitant ces paramètres comme des paramètres de nuisance. Ces estimateurs n'ont, semble-il, pas été développés et utilisés en acoustique sous-marine.

2.2.2.2 Modèle déterministe

On considère ici le modèle déterministe (**A2**) défini dans la partie 2.1.2. La densité de probabilité conditionnelle des observations \mathbf{y} sachant $\boldsymbol{\theta}$ s'écrit

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\prod_{m=1}^M \prod_{l=1}^L |\pi \sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)|^N} \times \prod_{m=1}^M \prod_{l=1}^L \exp \left(-\frac{\|\mathbf{y}_l(f_m) - s_l(f_m)\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})\|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \right). \quad (2.13)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance déterministe (MVD) des paramètres d'intérêt $\boldsymbol{\theta}$ est obtenu en maximisant (2.13) par rapport à $\boldsymbol{\theta}$ ainsi que par rapport à d'éventuels paramètres de nuisance. La variance du bruit peut être supposée soit connue soit inconnue et différentes quantités d'information sur la séquence de signaux source $s_l(f_m)$ peuvent être considérées. Cette séquence n'est généralement pas supposée parfaitement connue en pratique car même si la source est maîtrisée il subsiste souvent une certaine incertitude sur la synchronisation entre l'émission et la réception, sur le gain des capteurs, ou encore sur le canal sous-marin. Il y a donc généralement des paramètres de nuisance $\boldsymbol{\eta}$ à traiter. La stratégie mise en place pour gérer le plus simplement possible ces paramètres consiste à les remplacer par leur estimée analytique du maximum de vraisemblance $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ sachant $\boldsymbol{\theta}$ (obtenue en imposant $[\partial p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})/\partial \boldsymbol{\eta}](\hat{\boldsymbol{\eta}}) = 0$). On obtient alors une vraisemblance compacte sans paramètres de nuisance dont la maximisation par rapport à $\boldsymbol{\theta}$ conduit à l'estimateur du maximum de vraisemblance. Cette technique est appelée technique du *profile likelihood* [Pawitan01] dans la littérature anglophone.

Estimateur du MVD incohérent

Dans le cas où la variance du bruit est supposée connue et où aucune information n'est disponible sur la séquence de signaux source $s_l(f_m)$, l'estimateur du MVD des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ est [Dosso12]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MVD}^{inc} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} C^{inc}(\boldsymbol{\theta}), \text{ avec } C^{inc}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{|\bar{\mathbf{g}}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{y}_l(f_m)|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)}. \quad (2.14)$$

Ce processeur de MFP est appelé processeur *incohérent* car les différentes observations l et différentes fréquences f_m sont additionnées de manière incohérente (la valeur absolue qui élimine les informations de phase est à l'intérieur de la double somme). Ce modèle est adapté aux applications dans lesquelles la source n'est pas maîtrisée, c'est à dire pour les applications de l'acoustique passive. Un estimateur du MVD incohérent légèrement différent est obtenu dans le cas où la variance du bruit n'est pas connue [Mecklenbräuker00].

Estimateur de MVD Cohérent

Lorsque le signal source n'est pas totalement inconnu, il est possible d'utiliser certaines informations supplémentaires. Dans le cas où la variance du bruit est supposée connue et où les amplitudes et phases relatives entre les différentes observations l et différentes fréquences f_m sont disponibles mais inconnues dans l'absolu (le signal source est parfaitement connu à un gain d'amplitude et une phase à l'origine près), le modèle de

signal source se réduit à $s_l(f_m) = s$ et l'estimateur du MVD est [Dosso12]

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{MVD}^{coh} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} C^{coh}(\boldsymbol{\theta}),$$

$$\text{avec } C^{coh}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{L \sum_{m=1}^M \frac{\|\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})\|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)}} \left| \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{\mathbf{g}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{y}_l(f_m)}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \right|^2. \quad (2.15)$$

Ce processeur est appelé processeur *cohérent* car les différentes observations l et différentes fréquences f_m sont additionnées de manière cohérente (la valeur absolue est à l'extérieur de la double somme), ce qui permet de prendre en compte les informations de phase. Ce modèle est avant tout pertinent pour les applications où la source est totalement maîtrisée, c'est à dire les applications de l'acoustique active. Un estimateur du MVD cohérent différent pourrait être obtenu dans le cas où la variance du bruit n'est pas connue, cet estimateur n'a semble t-il pas été développé.

Les processeurs (2.14) et (2.15) représentent deux extrêmes en terme de connaissance sur la source. D'autres processeurs peuvent être obtenus pour des niveaux d'information intermédiaires. Ces cas se présentent par exemple quand l'amplitude de la source est supposée constante sur une bande fréquentielle ou dans le temps mais que la phase reste inconnue, ou encore quand la phase de la source peut être suivie (dans le cas d'une modulations de fréquence par exemple) mais que l'amplitude n'est pas connue. Une revue des processeurs du MVD correspondant aux différentes quantité d'information possibles sur la source a été réalisée par Dosso [Dosso12]. Cette revue présente également certain processeurs *ad-hoc* de la littérature et compare leurs performances avec celles des processeurs du MVD. Il faut noter que le processeur incohérent est de très loin le plus utilisé dans la pratique, les autre processeurs peuvent apporter de meilleures performances en considérant des informations supplémentaires sur la source mais sont aussi plus sensibles à des erreurs sur le modèle statistique des observations [Dosso02c, Soares03, Dosso12] ce qui limite quelque peu leur utilisation.

2.2.3 Implémentation numérique

L'estimation des paramètres inconnus nécessite une recherche dans l'espace des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ pour optimiser la fonction de coût. Cet espace de recherche est généralement limité à un espace réduit $[\boldsymbol{\theta}_{min}, \boldsymbol{\theta}_{max}]$. Les paramètres de localisation peuvent par exemple être bornés en considérant une distance maximale de détection possible et une profondeur limitée par la hauteur d'eau. Le support des paramètres environnementaux peut être restreint en se basant sur une connaissance *a priori* du milieu.

Si les paramètres inconnus sont uniquement les paramètres de localisation, l'optimisation peut être réalisée par simple évaluation de la fonction de coût sur une grille en distance et profondeur. En revanche, l'estimation des paramètres environnementaux nécessite une recherche dans un espace de grande dimension ce qui rend l'évaluation sur une grille bien trop coûteuse en temps de calcul pour être réalisée. Des méthodes d'optimisation plus efficaces doivent être employées. La fonction de coût est généralement multimodale avec de nombreux maxima locaux, l'optimisation est donc un problème difficile.

La méthode du recuit simulé introduite au début des années 1990 [Collins92, Lindsay93] a permis d'apporter une solution viable à ce problème. Les algorithmes génétiques ont également été introduits avec succès peu de temps plus tard par Gerstoft [Gerstoft94] apportant une solution alternative au recuit simulé. Des améliorations ont par la suite été proposées en combinant ces méthodes avec des algorithmes d'optimisation locale pour raffiner la solution et gagner en temps de calcul [Musil99, Dosso01].

2.3 Approche bayésienne

2.3.1 Principe

Dans un cadre bayésien [Robert07, Candy11, Idier13], les paramètres inconnus sont vus comme des variables aléatoires caractérisées par une densité de probabilité. L'inférence sur les paramètres inconnus est réalisée à travers l'analyse de la densité de probabilité conditionnelle $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ de $\boldsymbol{\theta}$ sachant les observations \mathbf{y} . Cette quantité appelée densité de probabilité *a posteriori* (DPP) est obtenue à l'aide du théorème de Bayes qui peut s'écrire de la façon suivante :

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})p(\boldsymbol{\theta}), \quad (2.16)$$

où $p(\boldsymbol{\theta})$ est l'information *a priori* sur les paramètres inconnus $\boldsymbol{\theta}$ et $p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})$ est la vraisemblance des observations. La DPP représente la connaissance sur $\boldsymbol{\theta}$ intégrant à la fois l'information *a priori* et l'information apportée par les données. Elle fournit donc toute l'information disponible pour réaliser l'inférence sur les paramètres inconnus. Le principe de l'approche bayésienne du MFP est illustrée sur la figure 2.4.

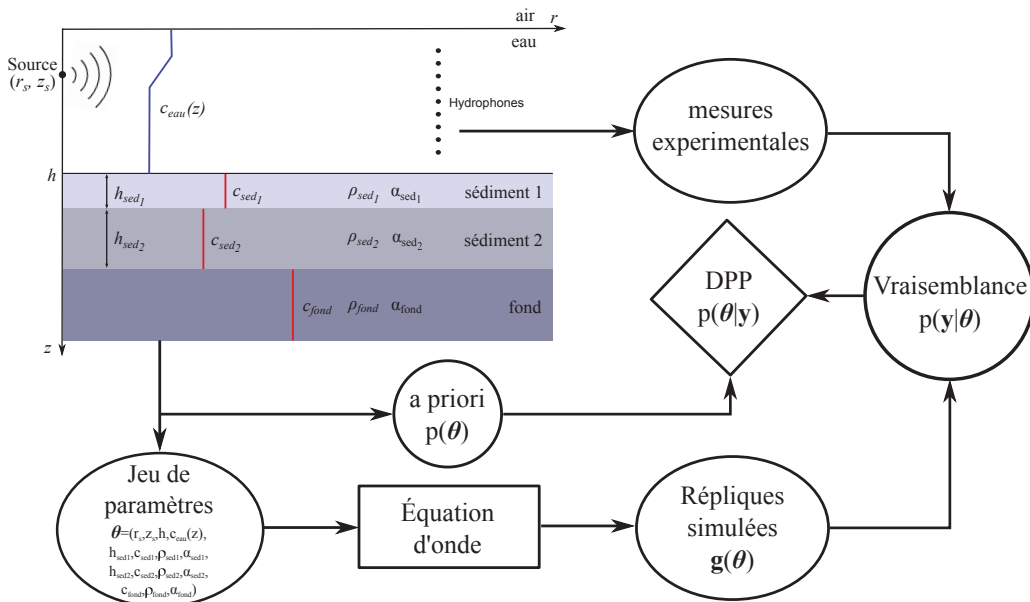


FIGURE 2.4 – Principe de l'approche bayésienne du MFP.

La DPP peut être utilisée pour estimer les paramètres à l'aide de plusieurs estimateurs bayésiens comme l'estimateur du maximum *a posteriori* (MAP) ou l'estimateur de la moyenne *a posteriori*. Le MAP est défini par

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}), \quad (2.17)$$

et l'estimateur de la moyenne *a posteriori* est défini par

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = \int \boldsymbol{\theta} p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) d\boldsymbol{\theta}. \quad (2.18)$$

L'estimateur du MAP est optimal en terme de probabilité d'erreur lorsque les paramètres ont des distributions de probabilité discrètes, alors que l'estimateur de la moyenne *a posteriori* est optimal en terme d'erreur quadratique moyenne (EQM). Une analyse plus approfondie de la DPP peut fournir des indications sur la fiabilité de l'estimée et sur d'autres solutions possibles au problème. Formulé ainsi, le problème inverse ne se limite pas à une estimation ponctuelle sans mesure de confiance comme c'est le cas avec les estimateurs du maximum de vraisemblance (MV). La DPP donne une incertitude sur le résultat de l'estimation ainsi que des informations supplémentaires (probabilité que la source soit en surface/immergée, corrélations entre paramètres...), informations qui peuvent s'avérer très utiles pour les applications du MFP.

2.3.2 Gestion des paramètres de nuisance

Dans un cadre bayésien, les paramètres de nuisance $\boldsymbol{\eta}$ doivent normalement être traités comme des paramètres aléatoires avec une densité de probabilité $p(\boldsymbol{\eta})$, et la DPP sur les paramètres d'intérêts $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ est obtenue en intégrant la DPP complète $p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}|\mathbf{y})$ par rapport à $\boldsymbol{\eta}$. L'intégration analytique n'est possible que pour certains paramètres avec une fonction de vraisemblance et un *a priori* spécifique. L'intégrale doit donc être réalisée numériquement dans la plupart des cas. Le problème majeur de cette approche réside dans le grand nombre de paramètres de nuisance qu'il peut potentiellement y avoir à intégrer (jusqu'à $L \times (M + 1)$ pour le modèle déterministe). Plusieurs alternatives ont été proposées par la communauté acoustique sous-marine pour passer outre ce problème [Gerstoft98, Huang06]. L'approche la plus simple à mettre en oeuvre consiste à remplacer les paramètres de nuisances $\boldsymbol{\eta}$ par leur estimée analytique au sens du maximum de vraisemblance sachant $\boldsymbol{\theta}$: $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = p(\boldsymbol{\theta}, \hat{\boldsymbol{\eta}}|\mathbf{y})$. L'intégration extrêmement coûteuse en temps est ainsi remplacée par une estimation. Cette méthode donne une approximation de la vraie DPP obtenue en intégrant les paramètres de nuisance, toutefois il a été montré que les deux méthodes pouvaient donner des résultats très similaires [Huang06].

Pour le modèle déterministe incohérent, si la variance du bruit est connue, la fonction de vraisemblance obtenue en remplaçant les paramètres de nuisance par leur estimée au sens du maximum de vraisemblance est [Mecklenbräuker00, Eq. (3.3)]

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) \propto \prod_{m=1}^M (\pi \sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m))^{-LN} \exp \left(-L \frac{\phi_m(\boldsymbol{\theta})}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \right), \quad (2.19)$$

et quand la variance du bruit n'est pas connue on obtient [Mecklenbräuker00, Eq. (3.11)]

$$p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}) \propto \prod_{m=1}^M \exp(-LN \log_e \phi_m(\boldsymbol{\theta})), \quad (2.20)$$

ou

$$\phi_m(\boldsymbol{\theta}) = \text{tr}(\mathbf{R}_m) - \frac{\mathbf{g}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{R}_m \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\mathbf{g}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}, \quad \mathbf{R}_m = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{y}_l(f_m) \mathbf{y}_l^H(f_m). \quad (2.21)$$

2.3.3 Implémentation numérique

L'évaluation de la DPP nécessite de choisir une densité de probabilité *a priori* pour les paramètres inconnus à estimer. Un *a priori* uniforme entre des valeurs limites $[\boldsymbol{\theta}_{min}, \boldsymbol{\theta}_{max}]$ est adopté dans la plupart des cas.

Si les paramètres inconnus sont uniquement les paramètres de localisation, la DPP peut simplement être évaluée sur une grille en distance et profondeur. En revanche, lorsqu'il y a de nombreux paramètres à estimer, la grande dimension de l'espace des paramètres rend l'évaluation sur une grille bien trop coûteuse en temps de calcul pour être réalisée. Des méthodes plus efficaces doivent donc être employées pour les applications d'inversion géoacoustique. La solution à ce problème a été apportée par Dosso en 2002 [Dosso02a, Dosso11a]. L'idée est de représenter la distribution de probabilité $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$ par un ensemble d'échantillons aléatoires tirés à l'aide d'une méthode de Monte Carlo par chaîne de Markov. Des échantillons sont tirés selon une loi de probabilité $q(\boldsymbol{\theta})$ habilement choisie et les échantillons sont conservés ou rejetés selon la méthode de Metropolis-Hasting de façon à ce que les échantillons acceptés suivent la distribution de probabilité $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. La DPP n'est significative que sur une région réduite du grand espace des paramètres. Pour que le tirage de ces échantillons soit efficace, c'est à dire pour que le taux d'échantillon accepté soit élevé, il faut que ces échantillons soient tirés préférentiellement dans les régions où la DPP est significative. La distribution $q(\boldsymbol{\theta})$ doit donc être choisie pour ressembler le plus possible à la DPP. Le succès de la méthode réside grandement dans le choix de cette distribution.

2.4 Limitations du matched-field processing

Dans une session plénière de la conférence Underwater Acoustics en 2013, Arthur Baggeroer interpelle avec un titre volontairement provocateur « Why did applications of MFP fail, or did we not understand how to apply MFP ? » [Baggeroer13]. Les méthodes de MFP ont été appliquées avec succès dans de nombreuses applications mais comme l'indique ce titre elles présentent aussi des limitations qui peuvent entraver leur bonne application.

2.4.1 Bruit

Les méthodes de MFP sont bien entendu sensibles au bruit ambiant présent dans l'océan. Quand le rapport signal sur bruit (RSB) devient trop faible, ce qui n'est pas rare dans un contexte passif, le problème d'estimation peut devenir ambigu et des erreurs importantes peuvent potentiellement être réalisées. Les performances de l'inversion s'en retrouvent alors considérablement dégradées. Par ailleurs, des sources parasites d'interférences peuvent également venir perturber l'application.

2.4.2 Problème des inadéquations

Les méthodes de MFP se basent sur un modèle statistique des observations pour estimer les paramètres d'intérêt. Le problème principal de ce type de méthode survient lorsqu'il y a des inadéquations entre ce modèle statistique et la réalité, on parle de *mismatch* ou de *model misspecification* dans la littérature anglophone. Les sources d'inadéquations sont nombreuses. On peut séparer les sources d'inadéquations en trois grandes catégories :

- les erreurs sur la structure du bruit : matrice de covariance spatiale mal connue, présence de sources d'interférences, non-gaussianité du bruit...,
- les erreurs sur le système d'émission et/ou de mesure : une position erronée de l'émetteur et des capteurs, gain et phase de l'émetteur et de capteurs imprécis...,
- les erreurs sur le modèle environnemental utilisé pour réaliser l'inversion (cf figure 2.5) et les imprécisions dans la méthode de résolution de l'équation d'onde.

Les erreurs sur le modèle environnemental sont reconnues comme le principal problème des approches du MFP. Elles sont dues à la connaissance souvent imprécise du milieu de propagation et aux simplifications réalisées pour modéliser le guide d'onde. L'incertitude environnementale est illustrée sur la figure 2.5.

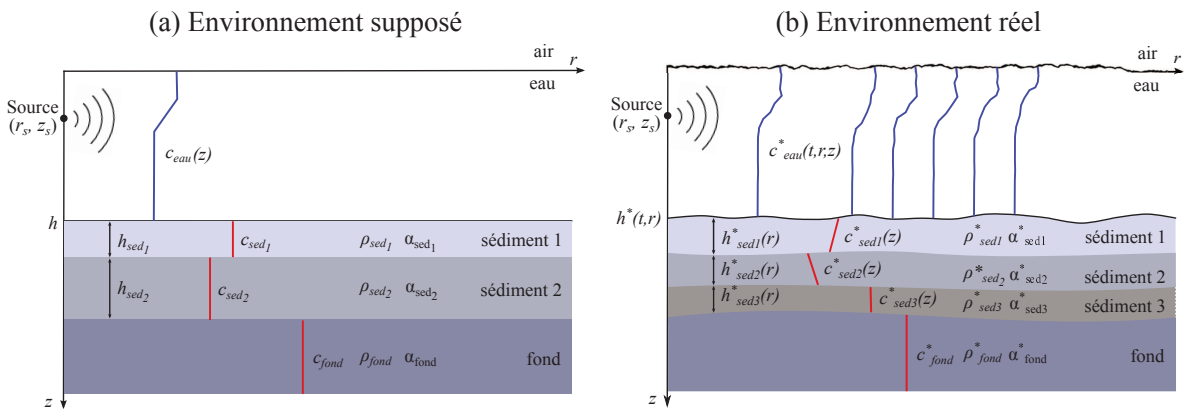


FIGURE 2.5 – Problème des erreurs sur le modèle environnemental : le milieu de propagation supposé pour réaliser l'inversion diffère du milieu de propagation réel.

Il est impossible d'obtenir une réalisation détaillée et fiable de l'environnement océanique. Le moyen le plus simple et le plus rapide de modéliser le champ acoustique dans le guide d'onde océanique est d'utiliser un modèle range-independent ou légèrement range-dependent, qui prend en compte les caractéristiques moyennes de l'environnement, mais qui ignore ou lisse les hétérogénéités aléatoires du milieu de propagation comme celles imposées par les ondes internes dans la colonne d'eau, les vagues à la surface ou la rugosité du fond. De plus, la forme générale du profil de célérité et la structure sédimentaire du fond n'est pas toujours bien connue, et les valeurs des paramètres modélisant le guide d'onde océanique ne sont pas toujours bien choisies (dans une application de localisation les valeurs retenues des paramètres environnementaux peuvent être assez éloignées de la réalité). Ces erreurs sur le milieu de propagation océanique peuvent dégrader sévèrement les performances des applications du MFP même quand le RSB est élevé [Del Balzo88, Feuillade89, Hamson89, Shang91, Xu01, Lin06, Morley08, Jiang09, Korakas10, Korakas11].

Il y a deux manières de voir les erreurs sur le modèle environnemental causées par les hétérogénéités aléatoires : soit on considère que le champ acoustique est figé dans le temps mais mal connu, soit on le considère comme fluctuant temporellement. Aux fréquences usuelles du MFP (basses fréquences, typiquement entre 10 Hz et 1 KHz), les fluctuations temporelles sont majoritairement provoquées par les hétérogénéités de grandes dimensions spatiales comme les ondes internes et le temps de cohérence du champ acoustique est généralement suffisamment long pour que l'on puisse considérer le champ acoustique comme constant sur quelques observations [Yang06]. Si l'on exclut ces éventuelles fluctuations temporelles et les éventuelles erreurs sur la gaussianité du bruit, les inadéquations se résument à supposer un modèle de fonction de transfert $\mathbf{g}_e(f_m, \boldsymbol{\theta})$ différent de la véritable fonction de transfert $\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})$. C'est cette conception des inadéquations que nous adopterons par la suite.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthode du MFP pour l'estimation des paramètres de localisation et/ou des paramètres environnementaux. Les configurations pratiques (sources, systèmes de réception) et plus formellement le modèle statistique du signal analysé ont d'abord été introduits. Deux modèles de signal source sont classiquement utilisés : le modèle stochastique et le modèle déterministe. Les estimateurs du MV correspondants puis l'approche bayésienne du MFP ont ensuite été présentés. À la fin de ce chapitre nous avons souligné les limites du MFP vis-à-vis du bruit et surtout vis-à-vis des erreurs de modélisation de l'environnement océanique. Arthur Baggeroer suggère que si les méthodes de MFP ne donnent pas toujours les résultats escomptés c'est en parti parce qu'elles ne sont pas utilisées avec les précautions qui doivent être prises sachant ces limitations fondamentales. Mesurer l'impact de ces erreurs sur les performances et trouver des méthodes robustes à ces erreurs reste une problématique toujours d'actualité 40 ans après l'introduction du MFP ! C'est dans cette logique que s'inscrivent les travaux réalisés au cours de cette thèse. Dans le chapitre 3 nous développons des outils de traitement du signal permettant de prédire les performances des estimateurs du MV présentés ici. Ces

outils sont concrètement appliqués à l'analyse des performances d'un problème particulier de localisation dans le chapitre 5. Dans le chapitre 4, à partir du formalisme bayésien présenté ici, nous développons une méthode bayésienne de localisation de source robuste aux erreurs de modélisation de l'environnement.

Chapitre 3

Prédiction des performances

Sommaire

3.1	Analyse du problème	52
3.1.1	Comportement vis-à-vis du bruit	52
3.1.2	Impact des inadéquations	55
3.2	Outils de traitement du signal pour la prédiction des performances . .	57
3.2.1	Bornes de performances	57
3.2.1.1	Inégalité de covariance	58
3.2.1.2	Borne de Ziv-Zakai	59
3.2.2	Approximation des performances : méthode des erreurs d'intervalle	61
3.3	Prédiction des performances du MFP	62
3.3.1	Probabilité d'erreur binaire	63
3.3.1.1	Fonction de répartition des formes quadratiques de variables gaussiennes	63
3.3.1.2	Modèle déterministe	64
3.3.1.3	Cas du modèle stochastique	67
3.3.2	Erreur asymptotique	68
3.3.2.1	En l'absence d'inadéquations : borne de Cramer-Rao	69
3.3.2.2	En présence d'inadéquations : approximation locale	69
3.4	Application	72
3.4.1	Implémentation numérique	72
3.4.1.1	Évaluation des probabilités d'erreur binaires	72
3.4.1.2	Mise en place du MEI	73
3.4.1.3	Évaluation de la BZZ	73
3.4.2	Illustrations	73
3.4.2.1	En l'absence d'inadéquations	74
3.4.2.2	En présence d'inadéquations	77
3.5	Conclusion	79

Les méthodes d'estimation par MFP peuvent être mises en défaut par le bruit ambiant et par les inadéquations éventuelles entre le modèle utilisé pour réaliser l'inversion et la réalité. Il est important de pouvoir quantifier les performances de ces algorithmes pour connaître et comprendre leurs limites, et enfin déterminer les conditions opérationnelles nécessaires à l'obtention de performances acceptables. La prédiction des performances du MFP n'est pas un problème simple si l'on souhaite éviter de recourir aux simulations de Monte-Carlo souvent très lourdes en charge de calcul. L'estimation souffre d'ambiguïtés importantes pouvant entraîner à faible RSB des erreurs non-locales qui ne sont pas prises en compte par l'outil habituel de mesure des performances que constitue la borne de Cramer-Rao (BCR). En outre, le problème des inadéquations est une difficulté considérable du MFP et ne doit pas être négligé dans l'analyse des performances.

Ce chapitre constitue une contribution à l'analyse des performances du MFP pour la résolution de problèmes inverses en acoustique sous-marine. Des outils de traitement du signal pour la prédiction des performances des estimateurs du MV présentés au chapitre précédent y sont développés. L'originalité repose principalement sur la considération du modèle de signal source déterministe, le modèle stochastique ayant déjà fait l'objet d'études antérieures. Le problème de l'estimation par MFP, son comportement vis-à-vis du bruit et l'impact des inadéquations, est d'abord décrit de manière qualitative. Les méthodes classiques d'analyse des performances sont ensuite présentées et enfin les résultats développés au cours de la thèse pour l'analyse des performances du MFP sont exposés et éprouvés sur quelques exemples.

3.1 Analyse du problème

3.1.1 Comportement vis-à-vis du bruit

L'estimation des paramètres d'intérêt en acoustique sous-marine est un problème non-linéaire car le champ acoustique est une fonction non-linéaire de ces paramètres. Tout comme le problème non-linéaire bien connu d'estimation d'un angle d'arrivée à l'aide d'une antenne, l'estimation par MFP souffre d'ambiguïtés importantes. Le critère du maximum de vraisemblance $C(\boldsymbol{\theta})$ en l'absence de bruit sur les mesures est appelé fonction d'ambiguïté en acoustique sous-marine. Dans le cadre du modèle déterministe incohérent la fonction d'ambiguïté a notamment pour expression (à partir de l'eq. (2.14) au chapitre 2) :

$$\psi^{inc}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \gamma(l, f_m) |\bar{\mathbf{g}}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \bar{\mathbf{g}}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v)|^2, \quad (3.1)$$

où $\gamma(l, f_m) = \frac{|s_l(f_m)|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \|\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v)\|^2$ et $\boldsymbol{\theta}_v$ est la valeur du jeu de paramètres inconnu à estimer. Les fonctions d'ambiguïté du MFP sont des fonctions multimodales. Une illustration d'une fonction d'ambiguïté typique est donnée sur la figure 3.1. La fonction d'ambiguïté

présente un lobe principal au niveau de la vraie valeur du paramètre et des lobes secondaires de part et d'autre de ce lobe principal. La forme de la fonction d'ambiguïté oriente le comportement de l'estimateur du MV en présence de bruit.

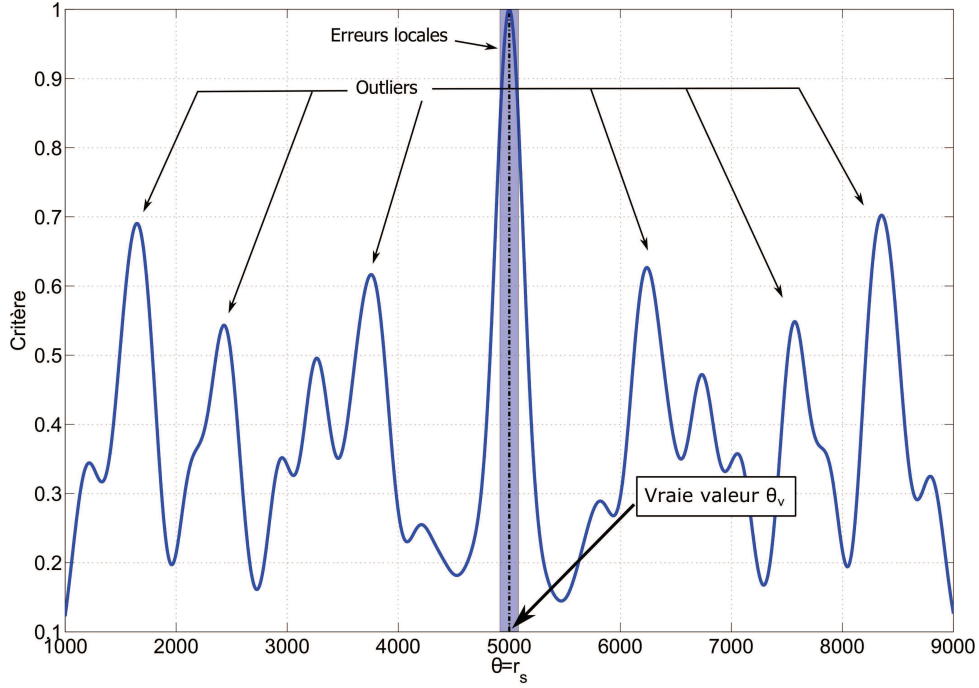


FIGURE 3.1 – Forme classique de la fonction d'ambiguïté et zones privilégiées des estimées en présence de bruit.

À fort RSB, l'estimée du maximum de vraisemblance est principalement localisée au niveau du lobe principal à proximité de la vraie valeur et les erreurs sont faibles, on parle d'erreurs locales. Quand le niveau de bruit augmente, l'estimée peut sortir du lobe principal et se situer de façon privilégiée sur des lobes secondaires, les erreurs sont alors importantes, on parle d'erreurs globales ou encore d'outliers. L'erreur quadratique moyenne (EQM) de l'estimateur présente ainsi trois régions d'opérations distinctes. Ces trois régions sont représentées schématiquement sur la figure 3.2. Lorsque le RSB est élevé les erreurs sont uniquement dues à des erreurs locales, on appelle cette région la zone asymptotique. Lorsque le RSB décroît, il arrive un certain seuil à partir duquel des outliers commencent à apparaître, l'EQM présente alors un accroissement rapide, cette région est appelée zone de décrochement. Enfin, lorsque le RSB est très faible le signal d'intérêt est noyé dans le bruit et l'estimée comporte une distribution quasi-uniforme sur le support du paramètre. L'EQM est quasi-constante, on parle de zone de non-information. Ce comportement de l'EQM s'obtient également en considérant le nombre d'observations L en lieu et place du RSB.

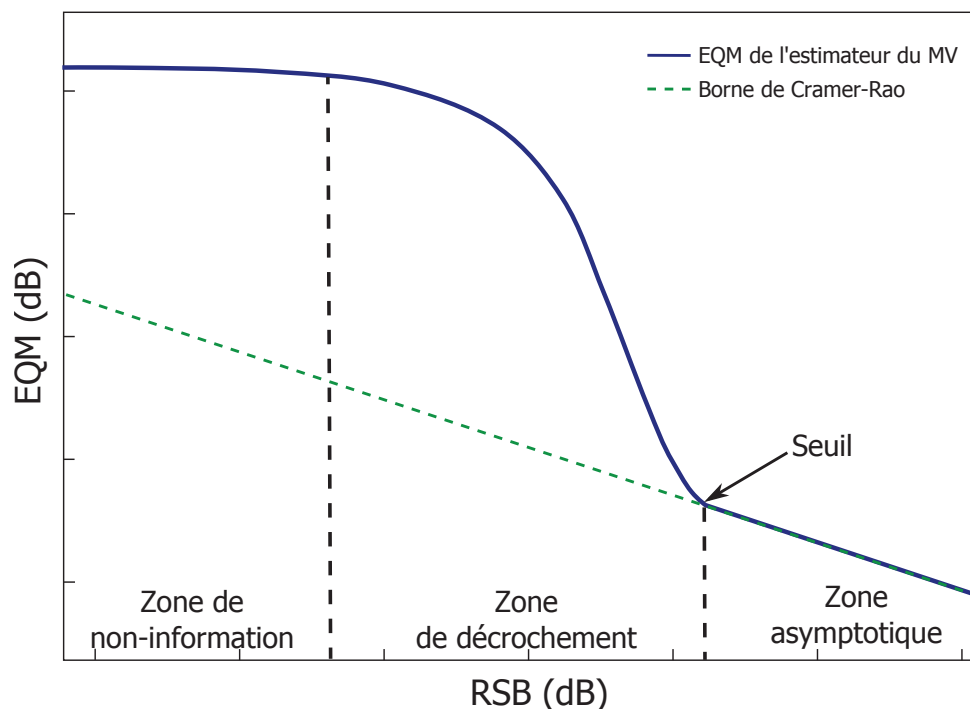


FIGURE 3.2 – Comportement typique de l'EQM de l'estimateur du MV et ses différentes régions d'opération. L'EQM est tracée en ligne bleue et superposée à la borne de Cramer-Rao représentée schématiquement en ligne traitillée verte.

La borne de Cramer-Rao (BCR) [Rao45, Cramer46, Kay93] est également schématisée sur cette figure. Elle donne une borne inférieure sur la variance d'un estimateur sans biais et est l'outil le plus communément utilisé pour examiner les performances d'un estimateur. Un estimateur est dit efficace s'il atteint la BCR. Les estimateurs du MV présentent souvent la propriété d'être asymptotiquement (en terme de RSB ou de nombre d'observations) non-biaisés et efficaces [Stoica90, Renaux06], et leurs performances sont donc généralement bien décrites par la BCR dans cette zone asymptotique. Au delà de cette zone asymptotique, la BCR n'est plus appropriée car elle est basée sur la dérivée locale de la fonction de vraisemblance et ne tient ainsi pas compte des outliers.

Le niveau de RSB des applications de l'acoustique sous-marine varie selon le contexte opérationnel. Des RSB élevés peuvent être atteints dans un contexte de sonar actif. À contrario les opérations de sonar passif imposent de travailler à des niveaux de RSB relativement faibles quand la source est de faible amplitude ou très éloignée. Les sous-marins ont notamment la vocation d'être des sources très peu bruyantes. La connaissance de l'EQM en fonction du RSB permet de déterminer le RSB nécessaire pour assurer la bonne qualité de l'estimation. Le seuil de décrochement de l'estimateur délimite généralement la zone de fonctionnement pour laquelle les erreurs sont jugées acceptables, sa connaissance se révèle donc fondamentale.

3.1.2 Impact des inadéquations

Les méthodes du MFP reposent sur la comparaison des données mesurées avec les données issues d'un modèle de propagation. Ce modèle est généralement erroné car l'environnement océanique est souvent mal connu et mal spécifié. Formellement, le modèle de fonction de Green supposé $\mathbf{g}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta})$ est différent de la véritable fonction de Green $\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})$ (cf chapitre 2). Ces inadéquations entre le modèle supposé et la réalité peuvent considérablement dégrader les performances. L'influence des inadéquations sur la forme de la fonction d'ambiguïté permet d'appréhender qualitativement l'impact de ces inadéquations sur les performances. Dans le cadre du modèle déterministe incohérent en présence d'inadéquations cette fois, la fonction d'ambiguïté a pour expression :

$$\psi^{inc}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \gamma(l, f_m) |\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \bar{\mathbf{g}}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v)|^2, \quad (3.2)$$

où $\gamma(l, f_m) = \frac{|s_l(f_m)|^2}{\sigma_w^2(f_m)} \|\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v)\|^2$ et $\boldsymbol{\theta}_v$ est la valeur du jeu de paramètres inconnu à estimer. Un exemple de fonction d'ambiguïté typique en présence d'inadéquations est donné sur la figure 3.3.

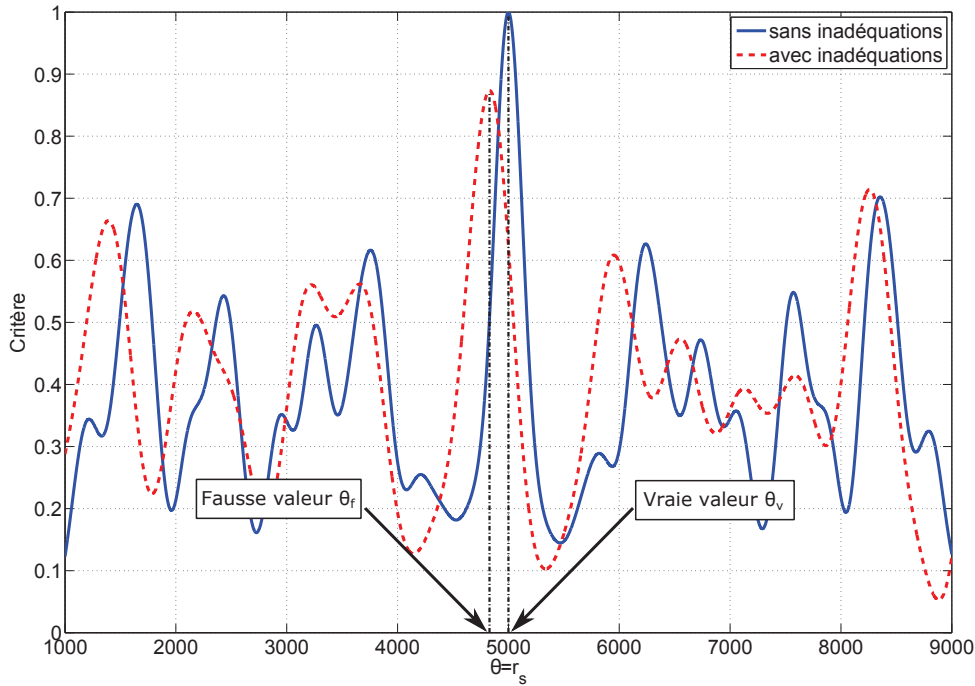


FIGURE 3.3 – Forme classique de la fonction d'ambiguïté en présence d'inadéquations. La fonction d'ambiguïté en présence d'inadéquations est tracée en ligne traitillée rouge et superposée à la fonction d'ambiguïté sans inadéquations tracée en ligne pleine bleue.

Plusieurs observations permettant de comprendre le comportement de l'estimateur en présence d'inadéquations peuvent être réalisées :

- Le lobe principal de la fonction d'ambiguïté n'est plus centré autour de la valeur vraie θ_v du paramètre mais autour d'une autre valeur θ_f : l'estimation présente un biais à RSB infini.
- Le lobe principal s'est légèrement adouci : l'erreur locale autour de la valeur fausse θ_f est plus importante que la borne de Cramer-Rao.
- Le rapport d'amplitude entre le lobe principal et les lobes secondaires a diminué : il y a une augmentation du seuil, le passage dans la zone de décrochement se fait plus rapidement.

Il faut noter que ces observations sont représentatives de l'influence typique des inadéquations, mais des comportements différents peuvent éventuellement être observés dans des cas plus particuliers. Un exemple typique du comportement de l'EQM de l'estimateur du MV en présence d'inadéquations est donné sur la figure 3.4. En présence d'inadéquations, la BCR est inutile pour décrire les performances quelle que soit la région d'opération.

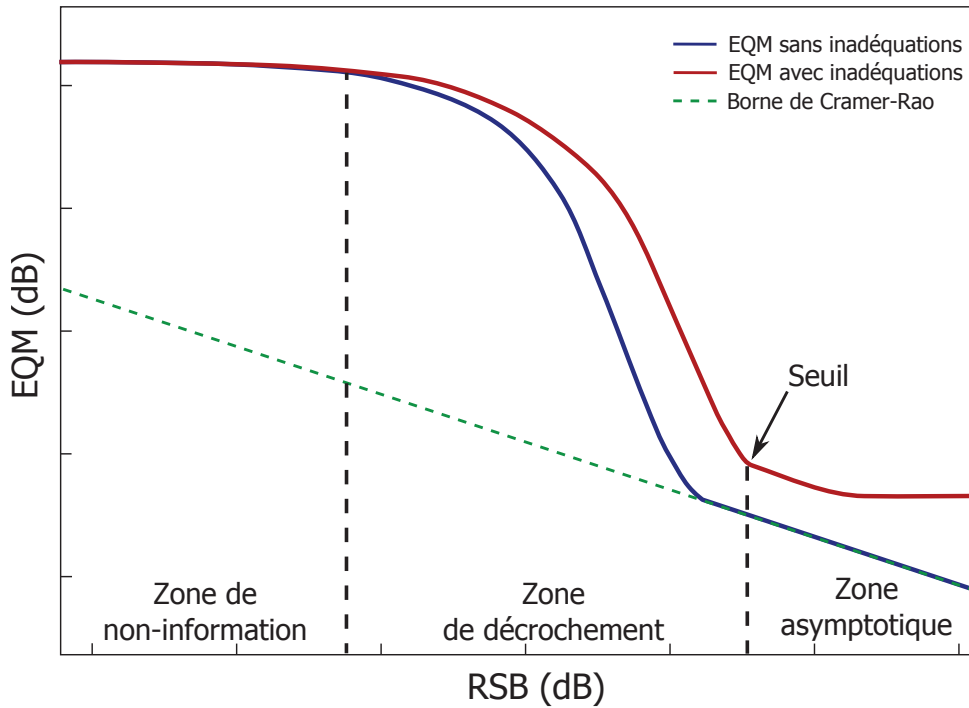


FIGURE 3.4 – Comportement typique de l'EQM de l'estimateur du MV en présence d'inadéquations. L'EQM en présence d'inadéquations est tracée en ligne rouge et superposée à l'EQM en l'absence d'inadéquations tracée en ligne bleue. La BCR est également représentée schématiquement en ligne traitillée verte.

Pour bien appréhender l'influence des inadéquations sur les performances il faut donc être capable de prédire à la fois le biais induit à RSB infini, la nouvelle erreur locale et le nouveau seuil de décrochement de l'estimateur.

3.2 Outils de traitement du signal pour la prédiction des performances

Comment faire alors pour prédire ces performances dans les trois zones de l'EQM sans recourir aux simulations de Monte-Carlo généralement bien trop coûteuses en temps de calcul ? La communauté du traitement du signal s'est longuement intéressée au problème de la prédiction des performances. Des bornes de performances plus pertinentes que la borne de Cramer-Rao et des méthodes d'approximation des performances ont été introduites et calculées pour des problèmes divers tels que la formation de voies et l'analyse spectrale.

3.2.1 Bornes de performances

Les bornes de performances fournissent des limites absolues aux performances possibles pour un modèle statistique donné des observations \mathbf{y} . La qualité d'une borne est déterminée par sa propension à se rapprocher des véritables performances limites. Une borne proche de ces performances est dite serrée (*tight* dans la littérature anglophone), à l'inverse une borne trop optimiste est dite peu serrée. On distingue les bornes déterministes pour lesquelles les paramètres $\boldsymbol{\theta}$ sont supposés déterministes mais inconnus et les bornes bayésiennes pour lesquelles les paramètres sont supposés aléatoires de distribution *a priori* $p(\boldsymbol{\theta})$. Les bornes déterministes fournissent localement, c'est à dire pour une valeur donnée $\boldsymbol{\theta}_v$ du jeu de paramètre $\boldsymbol{\theta}$, une limite à l'EQM définie par

$$\text{EQM}_{\text{locale}}(\boldsymbol{\theta}_v) = E_{\mathbf{y}} \left[\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta}_v \right) \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta}_v \right)^T \right]. \quad (3.3)$$

On parle d'EQM locale, à ne surtout pas confondre avec les erreurs locales dont la signification est bien entendu totalement différente. Les estimateurs du MV présentent généralement des performances assez proches des performances limites. Les bornes déterministes qui sont suffisamment serrées peuvent donc être utilisées pour prédire leurs performances. Les bornes bayésiennes fournissent globalement, c'est à dire sur l'ensemble de l'*a priori* $p(\boldsymbol{\theta})$, une limite à l'EQM définie par

$$\text{EQM}_{\text{globale}} = E_{\boldsymbol{\theta}} \left[E_{\mathbf{y}} \left[\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta} \right) \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta} \right)^T \right] \right]. \quad (3.4)$$

On parle d'EQM globale, là encore à ne surtout pas confondre avec les erreurs globales dont la signification est totalement différente. Non seulement les bornes bayésiennes permettent d'approximer les performances des estimateurs bayésiens comme le MAP ou l'estimateur de la moyenne *a posteriori* mais elles peuvent aussi être utilisées pour approximer l'EQM globale de l'estimateur du MV de part la relation

$$\text{EQM}_{\text{global}} = E_{\boldsymbol{\theta}} [\text{EQM}_{\text{local}}(\boldsymbol{\theta})]. \quad (3.5)$$

Les bornes déterministes sont principalement basées sur un principe d'inégalité de covariance. Les bornes bayésiennes peuvent être séparées en deux catégories [Van Trees07] :

celles qui comme les bornes déterministes proviennent d'un principe d'inégalité de covariance et les bornes de la famille Ziv-Zakai. Il faut noter que d'autres types de bornes existent [Todros10a, Todros10b, Routtenberg12], mais restent moins communes.

Les bornes de performances donnent des limites aux performances possibles pour un modèle d'observation donné. Très peu de travaux (seulement deux articles à notre connaissance [Xu04a, Richmond15]) s'intéressent aux bornes de performances dans le cas où le modèle statistique des observations supposé diffère du modèle réel (autrement dit en cas d'inadéquations entre les deux modèles). Une borne de Ziv-Zakai modifiée a été mise au point par Xu *et al.* [Xu04a] pour prendre en compte ces inadéquations. Néanmoins, il nous semble qu'il y ait quelques faiblesses théoriques dans le développement, préoccupations que nous avons confirmées par des simulations. Des discussions sont actuellement en cours avec les auteurs. Des travaux très récents de Richmond et Horowitz [Richmond15] posent un cadre rigoureux au développement de bornes déterministes en présence d'inadéquations. Ces travaux sont très prometteurs et ouvrent une brèche dans le domaine. Dans la suite, les bornes de performances considérées sont les bornes classiques sans inadéquations. La présence d'inadéquations sera traitée à l'aide d'une méthode d'approximation des performances présentée à la section 3.2.2.

On présente ici le principe d'inégalité de covariance pour les bornes déterministes et bayésiennes et la borne de Ziv-Zakai.

3.2.1.1 Inégalité de covariance

L'inégalité de covariance est une généralisation vectorielle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Elle se formule de la façon suivante :

$$E \left[(\mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{A}\mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}))(\mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{A}\mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}))^T \right] \geq \mathbf{0}. \quad (3.6)$$

où $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ est un vecteur réel quelconque de taille N , $\mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$ est un vecteur réel quelconque de taille K , et \mathbf{A} est une matrice réelle quelconque de taille $N \times K$. En posant $\mathbf{T} = E \left[\mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})^T \right]$ et $\mathbf{H} = E \left[\mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})^T \right]$, cette expression s'écrit

$$E \left[\mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})^T \right] \geq \mathbf{T}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{T}^T - \mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{A}^T, \quad (3.7)$$

La partie de droite de l'inégalité peut être maximisée en prenant $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{H}^{-1}$, ce qui donne

$$E \left[\mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})^T \right] \geq \mathbf{T}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{T}. \quad (3.8)$$

Si l'on se place dans un cadre déterministe, l'espérance porte uniquement sur \mathbf{y} , et $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - E_{\mathbf{y}} \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) \right]$ aboutit à

$$\text{EQM}_{\text{locale}}(\boldsymbol{\theta}) \geq \mathbf{T}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{T} + \mathbf{b}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{b}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^T(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.9)$$

ou $\mathbf{b}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\boldsymbol{\theta}) = E_{\mathbf{y}} \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta} \right]$ est le biais de l'estimateur. Ce terme de biais disparaît si l'on se restreint aux estimateurs non-biaisés. Dans un cadre bayésien l'espérance porte sur \mathbf{y} et $\boldsymbol{\theta}$, et $\mathbf{f}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta}$ aboutit à

$$\text{EQM}_{\text{globale}} \geq \mathbf{T}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{T}. \quad (3.10)$$

Différentes bornes de performances peuvent alors être obtenues à l'aide d'un choix judicieux de la fonction $\mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta})$. Outre la borne de Cramer-Rao [Rao45, Cramer46], les bornes déterministes basées sur une inégalité de covariance comportent la borne de Bhattacharyya [Bhattacharyya46], la borne de Barankin [Barankin49], la borne de Hammersley-Chapman-Robbins [Hammersley50, Chapman51] ou encore la borne d'Abel [Abel93]. Les bornes bayésiennes basées sur une inégalité de covariance comportent entre autre la borne de Cramer-Rao bayésienne [Van Trees68], la borne de Bhattacharyya bayésienne [Van Trees68], la borne de Bobrovsky-Zakai qui est une version bayésienne de la borne de Barankin [Bobrovsky76] et la borne de Weiss-Weinstein [Weiss85, Weinstein88]. Il faut noter que ces bornes peuvent être obtenues de manière alternative comme le résultat d'un problème de minimisation sous contraintes [Forster01, Forster02, Renaux05, Renaux07, Renaux08]. Cette approche fournit aussi un cadre théorique très intéressant pour bien comprendre les bornes de performances et développer de nouvelles bornes.

Lorsqu'il y a à la fois des paramètres déterministes et aléatoires à estimer, des bornes hybrides déterministes/bayésiennes peuvent être développées [Rockah87, Messer06, Ren14].

3.2.1.2 Borne de Ziv-Zakai

Contrairement aux bornes de performances précitées, les bornes de la famille Ziv-Zakai ne reposent pas sur une inégalité de covariance. Les bornes de la famille Ziv-Zakai sont des bornes bayésiennes qui se basent sur une réécriture astucieuse de l'EQM avec la probabilité d'erreur d'un problème de décision. On y trouve la borne originelle de Ziv-Zakai introduite en 1969 [Ziv69], et de nombreuses variantes telle que la borne de Bellini-Tartara [Bellini74] et les bornes de Bell [Bell95, Bell97]. Ces variantes sont pour la plupart décrites dans la thèse de Bell dont une large part est consacrée aux bornes de la famille Ziv-Zakai [Bell95]. On présente ici la borne de Ziv-Zakai (BZZ) sous sa forme la plus commune.

La BZZ est obtenue à travers une borne inférieure sur la probabilité de coupure, c'est à dire la probabilité que l'erreur d'estimation dépasse un certain seuil. Nous définissons l'erreur d'estimation comme $\epsilon = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta}$. Dans le cas d'un paramètre scalaire, la probabilité de coupure $P_r(|\epsilon| \geq \frac{h}{2})$ est bornée par [Bell97]

$$P_r\left(|\epsilon| \geq \frac{h}{2}\right) \geq \mathcal{V}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} 2 \times \min(p(\theta), p(\theta + h)) \cdot P_{min}(\theta, \theta + h) d\theta\right\}, \quad (3.11)$$

ou $p(\theta)$ est la densité de probabilité *a priori* des paramètres, \mathcal{V} est la fonction de remplissage de la vallée (*valley filling function* dans la littérature anglophone) définie par $\mathcal{V}\{f(h)\} = \max_{\xi \geq 0} f(h + \xi)$ et $P_{min}(\theta, \theta + h)$ est n'importe quelle borne inférieure de la probabilité d'erreur de la règle de décision suivante

$$\begin{aligned} \text{Decide } H_0 : \theta & \quad \text{if } \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) \leq \theta + \frac{h}{2} \\ \text{Decide } H_1 : \theta + h & \quad \text{if } \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) > \theta + \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

associé au test d'hypothèses binaire $\{H_0 : \theta, H_1 : \theta + h\}$ où les deux hypothèses sont équiprobables.

La borne de performance sur l'erreur quadratique est alors obtenue à partir de l'égalité suivante [Bell97]

$$E[\epsilon^2] = \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathbb{P}_r \left(|\epsilon| \geq \frac{h}{2} \right) h dh, \quad (3.13)$$

de sorte que

$$E_{\mathbf{y}, \theta}[\epsilon^2] \geq \int_0^\infty \mathcal{V} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \min(p(\theta), p(\theta + h)) \cdot P_{\min}(\theta, \theta + h) d\theta \right\} h dh. \quad (3.14)$$

La partie de droite de l'expression (3.14) est la BZZ. Cette borne a été améliorée par Bell *et al.* pour prendre en compte des jeux de paramètres vectoriels de taille N [Bell97]

$$\mathbf{a}^T \Sigma \mathbf{a} \geq \int_0^\infty \mathcal{V} \left\{ \max_{\Delta: \mathbf{a}^T \Delta = h} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \min(p(\boldsymbol{\theta}), p(\boldsymbol{\theta} + \Delta)) \cdot P_{\min}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} + \Delta) d\boldsymbol{\theta} \right] \right\} h dh, \quad (3.15)$$

où $\Sigma = E_{\mathbf{y}, \theta}[\epsilon \epsilon^T]$ est la matrice de covariance de l'erreur et où \mathbf{a} est un vecteur arbitraire de taille N . Quand \mathbf{a} est un vecteur unitaire avec un 1 à la position n , l'expression (3.15) donne une borne sur l'EQM du n ième paramètre de $\boldsymbol{\theta}$.

Comme on peut le voir sur les expressions (3.14) et (3.15), la BZZ nécessite deux intégrations. Dans le plupart des cas, ces intégrales doivent être évaluées numériquement. Quant à la probabilité $P_{\min}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} + \Delta)$, elle peut s'exprimer de la façon suivante

$$P_{\min}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta} + \Delta) = \frac{1}{2} [P_e(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta} + \Delta) + P_e(\boldsymbol{\theta} + \Delta | \boldsymbol{\theta})], \quad (3.16)$$

ou $P_e(\boldsymbol{\theta} + \Delta | \boldsymbol{\theta})$ et $P_e(\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\theta} + \Delta)$ sont des probabilités d'erreurs binaires : $P_e(\boldsymbol{\theta}_1 | \boldsymbol{\theta}_0)$ est ici la probabilité de décider en faveur du paramètre $\boldsymbol{\theta}_1$ dans le test d'hypothèses binaire $\{\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_0\}$ sachant que la vraie valeur est $\boldsymbol{\theta}_0$. Le calcul de ces probabilités représente le point clé du calcul de la BZZ. En l'absence de paramètres de nuisance, ces probabilités d'erreurs binaires sont données par les probabilités d'erreurs du test du rapport de vraisemblance (TRV) (*Likelihood ratio test (LRT)* dans la littérature anglophone), qui est le test optimal du problème de décision $\{H_1 : \boldsymbol{\theta}_1, H_0 : \boldsymbol{\theta}_0\}$. En présence de paramètres de nuisances, ces probabilités d'erreurs binaires peuvent être données par les probabilités d'erreurs du test du rapport de vraisemblance généralisé (TRVG) (*Generalized Likelihood ratio test (GLRT)* dans la littérature anglophone) [Decarli14]. Bien que l'optimalité du TRVG ne soit généralement pas garantie et que la BZZ ne soit alors pas assurée d'être une borne au sens strict, cela permet d'obtenir de bons résultats pour l'analyse des performances des estimateurs du MV. Pour être parfaitement rigoureux il faudrait cependant être capable de développer une borne de Ziv-Zakai hybride permettant de prendre compte des paramètres déterministes (les paramètres de nuisance) et aléatoires (les paramètres d'intérêt) [Ren14].

3.2.2 Approximation des performances : méthode des erreurs d'intervalle

Une stratégie alternative à l'utilisation de bornes de performances consiste à chercher à approximer les performances de l'estimateur dont on souhaite prédire les performances [Van Trees68, Rife74, Boyer04b, Boyer04a, Richmond05, Athley05, Richmond06a, Xu06, Van Trees07]. L'idée sous-jacente de ces méthodes est de séparer l'EQM en une somme pondérée de deux termes : l'un représentant la contribution des erreurs locales et l'autre représentant la contribution des erreurs globales. La méthode des erreurs d'intervalle (MEI) appelée *method of interval errors* (MIE) dans la littérature anglophone est une méthode d'approximation des performances particulièrement bien adaptée aux problèmes d'estimation non-linéaires avec de fonctions d'ambiguïté multimodales [Athley05, Richmond06a, Xu06].

Soit θ_v la valeur du paramètre à estimer, θ_0 la valeur du paramètre échantillonné au maximum de la fonction d'ambiguïté et $\{\theta_1, \theta_2 \dots \theta_{N_o}\}$ un ensemble discret de points échantillonnés aux maxima des lobes secondaires de la fonction d'ambiguïté tel que réalisé sur la figure 3.5. Le MEI approxime l'EQM de la façon suivante [Athley05, Xu06, Richmond06a, Xu11b] :

$$\text{EQM}_{\text{locale}}(\theta_v) \approx \left(1 - \sum_{n=1}^{N_o} P_e(\theta_n|\theta_0)\right) \times \Sigma_{as}(\theta_v) + \sum_{n=1}^{N_o} P_e(\theta_n|\theta_0) \times (\theta_n - \theta_v)(\theta_n - \theta_v)^T. \quad (3.17)$$

où $\Sigma_{as}(\theta_v)$ est l'EQM asymptotique de l'estimateur, et $P_e(\theta_n|\theta_0)$ est la probabilité d'erreur binaire de l'estimateur, c'est à dire la probabilité de décider en faveur du paramètre θ_n dans le test d'hypothèses binaire $\{\theta_n, \theta_0\}$, éventuellement en présence d'inadéquations ($\theta_v \neq \theta_0$). La probabilité d'erreur binaire est utilisée comme une approximation de la probabilité que l'estimée tombe sur le lobe secondaire n et est multipliée par l'erreur qui en résulte. La quantité $(1 - \sum_{n=1}^{N_o} P_e(\theta_n|\theta_0))$ est utilisée comme une approximation de la probabilité que l'estimée tombe sur le lobe principal (c'est à dire de la probabilité que l'erreur soit locale) et est multipliée par l'EQM qui en résulte.

Dans un cadre bayésien, l'EQM globale peut être obtenue en évaluant l'espérance de l'EQM ci-dessus par rapport à la densité de probabilité *a priori* des paramètres $p(\theta)$.

En l'absence d'inadéquations $\theta_0 = \theta_v$. L'EQM de l'estimateur du MV peut être approximée en prenant $\Sigma_{as}(\theta_v) = \Sigma_{BCR}(\theta_0)$ où $\Sigma_{BCR}(\theta_0)$ est la BCR, et avec $P_e(\theta_n|\theta_0)$ la probabilité d'erreur binaire de l'estimateur du MV sans inadéquations (la même probabilité d'erreur binaire que pour la borne de Ziv-Zakai). En présence d'inadéquations $\theta_0 = \theta_f$, l'EQM de l'estimateur du MV ne peut plus être approximée avec la BCR et la probabilité d'erreur binaire de l'estimateur du MV sans inadéquations. Il faut recourir à une autre approximation des erreurs locales et utiliser la probabilité d'erreur binaire en présence d'inadéquations de l'estimateur du MV.

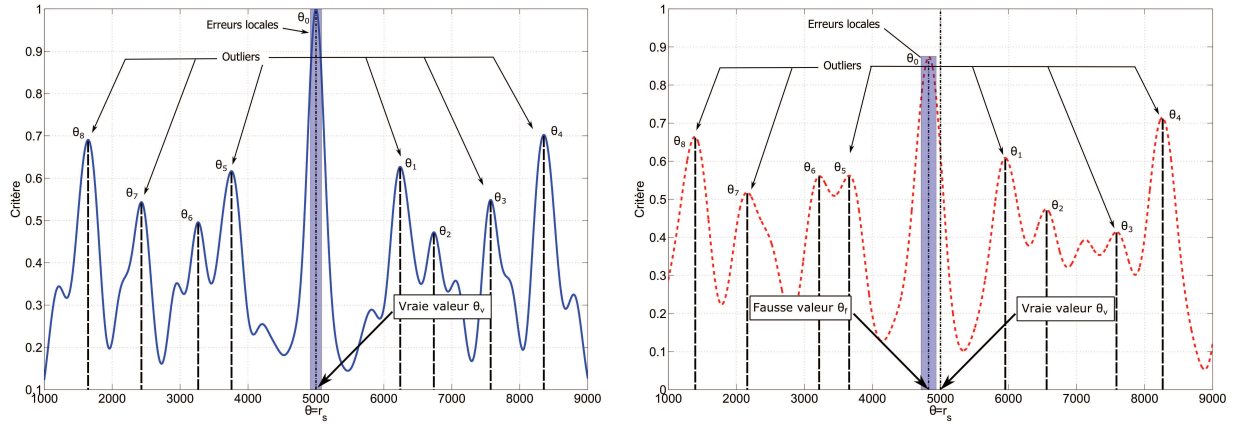


FIGURE 3.5 – Fonction d’ambiguïté et échantillonnage des lobes secondaires pour le MEI. Exemple sur une fonction d’ambiguïté sans inadéquations à gauche et sur une fonction d’ambiguïté avec inadéquations à droite

3.3 Prédiction des performances du MFP

Dans le domaine de l’acoustique sous-marine, la prédiction des performances du MFP s’est souvent limitée au calcul et à l’étude de la BCR [Baggeroer95, Tabrikian96, Thode02, Zanolin04, Xu11a]. D’autres bornes plus pertinentes ont cependant été calculées pour le modèle d’observation du MFP. La borne de Barankin a été appliquée par Tabrikian et Krolik [Tabrikian99] pour les modèles stochastique et déterministe de signaux sources dans le cas particulier où une seule fréquence est utilisée. Cette borne est plus pertinente que la BCR dans la mesure où elle ne se limite pas à l’erreur locale. Elle s’avère toutefois peu serrée dans la forme sous laquelle elle est implémentée, dans la mesure où elle donne des limites de performance trop optimistes et ne prédit pas précisément le seuil de décrochement. Les bornes bayésiennes de Weiss-Weinstein et de Ziv-Zakai ont été calculées par Xu *et al.* pour le modèle de signal source stochastique uniquement [Xu04b, Xu06]. Ces deux bornes sont connues pour faire partie des bornes existantes les plus serrées et se sont avérées donner des prédictions fiables pour les estimateurs du MFP. D’autres types de bornes basées sur la théorie de l’information ont également été proposées récemment par Meng et Buck [Meng10]. L’approximation du MEI a été appliquée par Xu pour le modèle de signal source stochastique uniquement et sans inadéquations [Xu06, Xu11b].

Les résultats développés au cours de la thèse permettent d’utiliser le MEI avec et sans inadéquations ainsi que la borne de Ziv-Zakai pour prédire les performances des estimateurs du maximum de vraisemblance déterministes (2.14) et (2.15). Les performances en l’absence d’inadéquations ont été développés dans l’article [Le Gall14a], et les performances en présence d’inadéquations ont fait l’objet d’une soumission d’article [Le Gall15c]. Ces résultats sont présentés dans ce qui suit. On commence par présenter le calcul de la probabilité d’erreur binaire puis on présente le calcul de l’erreur asymptotique.

3.3.1 Probabilité d'erreur binaire

La difficulté majeure pour l'analyse des performances de l'estimateur du MV à l'aide du MEI ou pour l'évaluation de la BZZ, réside dans le calcul de la probabilité d'erreur binaire de l'estimateur du MV en présence et en l'absence d'inadéquations. La probabilité d'erreur binaire est la probabilité de choisir le paramètre θ_1 dans le test d'hypothèses binaire équiprobable $\{\theta_1, \theta_0\}$. Comme nous venons de le présenter, cette probabilité est utilisée pour approximer la probabilité des outliers associés à chaque lobe secondaire de la fonction d'ambiguïté dans le MEI, et pour obtenir une borne inférieure à un problème de décision sous-optimal dans la BZZ. Nous développons ici une méthode permettant de calculer la probabilité d'erreur binaire exacte de l'estimateur du MV du MFP pour les modèles déterministes incohérent (2.14) et cohérent (2.15). Le modèle stochastique (2.9) a déjà été traité sous une autre approche [Xu01, Xu04b, Xu11b] mais nous présentons également brièvement notre approche pour ce modèle. Le modèle déterministe n'a à notre connaissance jamais été traité dans le cas du problème multi-fréquentiel que constitue le MFP, bien qu'une solution existe pour le problème mono-fréquentiel plus simple qu'est la formation de voies en l'absence d'inadéquations [Athley05]. En outre, l'approche proposée ici permet d'unifier les deux modèles stochastique et déterministe sous un même formalisme.

Les expressions des probabilités d'erreurs binaires sont développées à la lumière de résultats récents sur la fonction de répartition des formes quadratiques de variables gaussiennes [Al-Naffouri09]. En effet, les estimateurs du MV présentés dans le chapitre précédent sont des critères quadratiques du vecteur d'observation \mathbf{y} qui est supposé avoir une distribution gaussienne. Ainsi, le calcul des probabilités d'erreur binaires implique la comparaison de formes quadratiques de variables gaussiennes. Dans le paragraphe suivant, nous présentons brièvement les résultats théoriques sur les formes quadratiques de variables gaussiennes qui seront utilisés pour calculer les expressions des probabilités d'erreur binaires.

3.3.1.1 Fonction de répartition des formes quadratiques de variables gaussiennes

Soit \mathbf{A} une matrice Hermitienne carrée, et $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^H$ la décomposition en éléments propres de cette matrice : $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_P)$ où les λ_p sont les valeurs propres de \mathbf{A} , et $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_P]$, où les \mathbf{v}_p sont les vecteurs propres de \mathbf{A} . Soit un vecteur aléatoire gaussien $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_P)$, la fonction de répartition de la forme quadratique $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}$ peut s'exprimer en fonction des vecteurs propres et des valeurs propres de \mathbf{A} de la façon suivante [Al-Naffouri09]

$$P_r(\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} \leq q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{q(j\omega + \beta)}}{j\omega + \beta} \frac{e^{-c}}{\prod_{p=1}^P (1 + \lambda_p(j\omega + \beta))} d\omega, \quad (3.18)$$

pour n'importe quel réel $\beta > 0$ tel que $1 + \beta\lambda_p > 0$, et avec $c = \sum_{p=1}^P \frac{\lambda_p |\mathbf{v}_p^H \boldsymbol{\mu}|^2 (j\omega + \beta)}{(1 + \lambda_p(j\omega + \beta))}$. La fonction de répartition est alors caractérisée par une simple intégrale mono-dimensionnelle

qui peut être évaluée numériquement.

Comme nous le verrons dans la prochaine section, la forme quadratique Q suivante est d'un intérêt particulier pour notre problème du MFP :

$$Q = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \lambda_{1m} |z_{1m,l}|^2 + \lambda_{2m} |z_{2m,l}|^2, \quad (3.19)$$

ou $z_{1m,l} \sim \mathcal{CN}(\mu_{1m,l}, 1)$, $z_{2m,l} \sim \mathcal{CN}(\mu_{2m,l}, 1)$, $l = 1 \dots L$, $m = 1 \dots M$ sont des variables aléatoires indépendantes. Sur la base du résultat précédent, la fonction de répartition de Q peut s'exprimer comme suit

$$P_r(Q \leq q) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{q(j\omega + \beta)}}{j\omega + \beta} \frac{e^{-c}}{\prod_{m=1}^M (1 + \lambda_{1m}(j\omega + \beta))^L (1 + \lambda_{2m}(j\omega + \beta))^L} d\omega, \quad (3.20)$$

avec

$$c = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{\lambda_{1m} |\mu_{1m,l}|^2 (j\omega + \beta)}{(1 + \lambda_{1m}(j\omega + \beta))} + \frac{\lambda_{2m} |\mu_{2m,l}|^2 (j\omega + \beta)}{(1 + \lambda_{2m}(j\omega + \beta))}, \quad (3.21)$$

pour un réel $\beta > 0$ tel que $1 + \beta\lambda_{1m} > 0$, et $1 + \beta\lambda_{2m} > 0$.

Ces résultats sont maintenant utilisés pour obtenir les expressions des probabilités d'erreur binaires

3.3.1.2 Modèle déterministe

Les estimateurs du MVS et du MVD peuvent être vus comme des formes quadratiques de variables gaussiennes. Dans le cas du MVD cependant, les variables gaussiennes ne sont pas centrées et il n'existe pas à notre connaissance de forme analytique pour les probabilités d'erreur binaires. Cela rend le calcul des probabilités d'erreur binaires exactes difficile. Nous apportons une solution en utilisant les résultats présentés ci-dessus.

Modèle déterministe incohérent

Dans le cas général où le modèle $\mathbf{g}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta})$ utilisé pour réaliser l'inversion n'est pas nécessairement en adéquation avec le modèle $\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})$ suivi par les données $\mathbf{y}_{m,l} \sim \mathcal{CN}(s_l(f_m)\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v), \sigma_{\mathbf{w}}(f_m)\mathbf{I}_N)$, la probabilité d'erreur binaire $P_e(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{\theta}_0)$ de l'estimateur du MVD incohérent (introduit au chapitre 2 eq. (2.14)) est donnée par

$$P_e(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{\theta}_0) = P_r \left(\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{|\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \mathbf{y}_l(f_m)|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} - \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{|\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{y}_l(f_m)|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \geq 0 \right). \quad (3.22)$$

Dans la suite, on montre que cette probabilité peut se calculer à l'aide des résultats de la section précédente. Soit la forme quadratique Q définie par

$$Q = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L Q_{m,l}, \quad (3.23)$$

où

$$Q_{m,l} = \mathbf{y}_l^H(f_m) \left[\frac{\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1)}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} - \frac{\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_0)}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \right] \mathbf{y}_l(f_m). \quad (3.24)$$

La probabilité d'erreur binaire $P_e(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{\theta}_0)$ peut alors s'écrire

$$P_e(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{\theta}_0) = \text{Pr}(Q \geq 0). \quad (3.25)$$

On définit $\mathbf{x}_{m,l}$ tel que $\mathbf{x}_{m,l} = \frac{y_l(f_m)}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_m)}$, $\mathbf{x}_{m,l} \sim \mathcal{CN}(\frac{s_l(f_m)}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_m)} \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v), \mathbf{I}_N)$. La forme quadratique $Q_{m,l}$ peut alors s'écrire

$$Q_{m,l} = \mathbf{x}_{m,l}^H \left[\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) - \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \right] \mathbf{x}_{m,l}. \quad (3.26)$$

Soit $\mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^H$ la décomposition en éléments propres de

$$\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) - \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_0). \quad (3.27)$$

Il s'en suit que

$$Q_{m,l} = \mathbf{z}_{m,l}^H \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{z}_{m,l}, \quad (3.28)$$

où $\mathbf{z}_{m,l} = \mathbf{U}^H \mathbf{x}_{m,l}$. Comme $\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{I}_N$, on a $\mathbf{z}_{m,l} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{U}^H \frac{s_l(f_m)}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_m)} \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v), \mathbf{I}_N)$. En outre, la matrice définie dans l'expression (3.27) est de rang 2, donc $\boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_{1_m}, \lambda_{2_m}, 0 \dots 0)$ et la forme quadratique $Q_{m,l}$ se réduit à

$$Q_{m,l} = \lambda_{1_m} |z_{1_m,l}|^2 + \lambda_{2_m} |z_{2_m,l}|^2, \quad (3.29)$$

où $z_{1_m,l} \sim \mathcal{CN}(\mu_{1_m,l}, 1)$, $z_{2_m,l} \sim \mathcal{CN}(\mu_{2_m,l}, 1)$ sont des variables aléatoires indépendantes avec pour valeurs moyennes $\mu_{1_m,l} = \frac{s_l(f_m)}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_m)} \mathbf{u}_{1_m}^H \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v)$ et $\mu_{2_m,l} = \frac{s_l(f_m)}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_m)} \mathbf{u}_{2_m}^H \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v)$.

Ainsi, en utilisant les équations (3.19), (3.20), (3.21) et les résultats ci-dessus, nous montrons que la probabilité d'erreur binaire s'exprime de la façon suivante

$$P_e(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{\theta}_0) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega + \beta} \frac{e^{-c}}{\prod_{m=1}^M (1 + \lambda_{1_m}(j\omega + \beta))^L (1 + \lambda_{2_m}(j\omega + \beta))^L} d\omega, \quad (3.30)$$

$$c = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{\lambda_{1_m} |\mu_{1_m,l}|^2 (j\omega + \beta)}{(1 + \lambda_{1_m}(j\omega + \beta))} + \frac{\lambda_{2_m} |\mu_{2_m,l}|^2 (j\omega + \beta)}{(1 + \lambda_{2_m}(j\omega + \beta))}, \quad (3.31)$$

pour n'importe quel réel $\beta > 0$ tel que $1 + \beta\lambda_{1_m} > 0$, et $1 + \beta\lambda_{2_m} > 0$. Les détails du calcul des vecteurs propres \mathbf{u}_{1_m} , \mathbf{u}_{2_m} et des valeurs propres λ_{1_m} , λ_{2_m} sont donnés dans l'annexe C. Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1_m, 2_m} = \pm \sqrt{1 - |\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0)|}. \quad (3.32)$$

Les valeurs moyennes $\mu_{1_m,l}$, $\mu_{2_m,l}$ s'expriment en fonction du RSB au niveau des récepteurs à la fréquence f_m pour l'observation l noté $\gamma(l, f_m)$

$$\gamma(l, f_m) = \frac{|s_l(f_m)|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \|\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v)\|^2. \quad (3.33)$$

Dans le cas général où il y a des inadéquations ($\mathbf{g}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}) \neq \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})$) les valeurs moyennes sont

$$\mu_{1m,l,2m,l} = \sqrt{\frac{\gamma(l, f_m)(1 - \lambda_{1m,2m})}{2\lambda_{1m,2m}^2}} \left(\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v) - \frac{1}{1 - \lambda_{1m,2m}} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v) \right). \quad (3.34)$$

En l'absence d'inadéquations $\mathbf{g}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})$ et les expressions des valeurs moyennes se simplifient en

$$\mu_{1m,l,2m,l} = -\text{signe}(\lambda_{1m,2m}) \sqrt{\frac{\gamma(l, f_m)(1 - \lambda_{1m,2m})}{2}}. \quad (3.35)$$

Le calcul des probabilités d'erreur binaires de l'estimateur du MVD incohérent nécessite simplement le calcul des quantités λ_{1m} , λ_{2m} , $\mu_{1m,l}$, $\mu_{2m,l}$ et l'évaluation numérique d'une intégrale mono-dimensionnelle.

Modèle déterministe cohérent

On peut montrer que le modèle déterministe cohérent est un cas particulier plus simple du modèle déterministe incohérent pour l'évaluation de la probabilité d'erreur binaire. En effet, en définissant les observations sous la forme d'un unique vecteur \mathbf{x}

$$\mathbf{x} = \left[\frac{\mathbf{y}_1^T(f_1)}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_1)} \quad \dots \quad \frac{\mathbf{y}_1^T(f_M)}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_M)} \quad \dots \quad \frac{\mathbf{y}_L^T(f_1)}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_1)} \quad \dots \quad \frac{\mathbf{y}_L^T(f_M)}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_M)} \right]^T, \quad (3.36)$$

et de façon similaire les fonctions de Green $\mathbf{g}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta})$ comme un unique vecteur $\mathbf{g}_\epsilon(\boldsymbol{\theta})$

$$\mathbf{g}_\epsilon(\boldsymbol{\theta}) = \left[\frac{\mathbf{g}_\epsilon^T(f_1, \boldsymbol{\theta})}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_1)} \quad \dots \quad \frac{\mathbf{g}_\epsilon^T(f_M, \boldsymbol{\theta})}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_M)} \quad \dots \quad \frac{\mathbf{g}_\epsilon^T(f_1, \boldsymbol{\theta})}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_1)} \quad \dots \quad \frac{\mathbf{g}_\epsilon^T(f_M, \boldsymbol{\theta})}{\sigma_{\mathbf{w}}(f_M)} \right]^T, \quad (3.37)$$

la probabilité d'erreur binaire de l'estimateur du MVD cohérent s'écrit

$$P_e(\boldsymbol{\theta}_1 | \boldsymbol{\theta}_0) = P_r(Q \geq 0), \quad (3.38)$$

où

$$Q = \mathbf{x}^H \left[\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(\boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(\boldsymbol{\theta}_1) - \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(\boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(\boldsymbol{\theta}_0) \right] \mathbf{x}. \quad (3.39)$$

On peut alors se ramener au cas déterministe avec une seule fréquence et une seule observation par analogie avec les expressions (3.23), (3.25) et (3.26). Dans le cas général où le modèle $\mathbf{g}_\epsilon(\boldsymbol{\theta})$ utilisé pour réaliser l'inversion n'est pas nécessairement en adéquation avec le modèle $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ suivi par les données $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{s}\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_v), \mathbf{I}_{L \times M \times N})$, la probabilité d'erreur binaire $P_e(\boldsymbol{\theta}_1 | \boldsymbol{\theta}_0)$ de l'estimateur du MVD cohérent (introduit au chapitre 2 eq. (2.15)) s'exprime alors de la façon suivante

$$P_e(\boldsymbol{\theta}_1 | \boldsymbol{\theta}_0) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\omega + \beta} \frac{e^{-c}}{(1 + \lambda_1(j\omega + \beta))(1 + \lambda_2(j\omega + \beta))} d\omega, \quad (3.40)$$

$$c = \frac{\lambda_1 |\mu_1|^2 (j\omega + \beta)}{(1 + \lambda_1 (j\omega + \beta))} + \frac{\lambda_2 |\mu_2|^2 (j\omega + \beta)}{(1 + \lambda_2 (j\omega + \beta))}, \quad (3.41)$$

pour n'importe quel réel $\beta > 0$ tel que $1 + \beta\lambda_1 > 0$, et $1 + \beta\lambda_2 > 0$. Les valeurs propres sont

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{1 - |\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(\boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(\boldsymbol{\theta}_0)|^2}. \quad (3.42)$$

Dans le cas général où il y a des inadéquations ($\mathbf{g}_\epsilon(\boldsymbol{\theta}) \neq \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$) les valeurs moyennes sont

$$\mu_{1,2} = \sqrt{\frac{L \sum_{m=1}^M \gamma(f_m)(1 - \lambda_{1,2})}{2\lambda_{1,2}^2}} \left(\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(\boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_v) - \frac{1}{1 - \lambda_{1,2}} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(\boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(\boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(\boldsymbol{\theta}_1) \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}_v) \right). \quad (3.43)$$

En l'absence d'inadéquations, $\mathbf{g}_\epsilon(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ et les expressions des valeurs moyennes se simplifient en

$$\mu_{1,2} = -\text{signe}(\lambda_{1,2}) \sqrt{\frac{L \sum_{m=1}^M \gamma(f_m)(1 - \lambda_{1,2})}{2}}. \quad (3.44)$$

Comme dans le cas précédent, le calcul des probabilités d'erreur binaires de l'estimateur du MVD cohérent nécessite simplement le calcul des quantités λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 et l'évaluation numérique d'une intégrale mono-dimensionnelle.

3.3.1.3 Cas du modèle stochastique

L'estimateur du MV étant dans le cas stochastique une forme quadratique de variables aléatoires gaussiennes **centrées**, il est possible d'obtenir une forme analytique de la probabilité d'erreur binaire, ce calcul a déjà été traité par Xu *et al.* [Xu11b]. Néanmoins, nous montrons comment l'approche proposée ici pour le modèle déterministe peut aussi s'appliquer au modèle stochastique, ce qui permet d'unifier les deux modèles sous une même approche et d'envisager des modèles hybrides stochastique/déterministe.

Dans le cas général où le modèle $\mathbf{g}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta})$ utilisé pour réaliser l'inversion n'est pas nécessairement en adéquation avec le modèle $\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})$ suivi par les données $\mathbf{y}_{m,l} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}_{N \times 1}, \boldsymbol{\Sigma}_y(f_m, \boldsymbol{\theta}))$ où $\boldsymbol{\Sigma}_y(f_m, \boldsymbol{\theta}) = \sigma_s^2(f_m) \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{g}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) + \sigma_w^2(f_m) \mathbf{I}_N$, la probabilité d'erreur binaire $P_e(\boldsymbol{\theta}_1 | \boldsymbol{\theta}_0)$ de l'estimateur du MVS (introduit au chapitre 2 eq. (2.9)) est donnée par

$$P_e(\boldsymbol{\theta}_1 | \boldsymbol{\theta}_0) = \Pr \left(\sum_{m=1}^M D_1(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) + \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L D_2(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \cdot |\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \mathbf{y}_l(f_m)|^2 - \sum_{m=1}^M D_1(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) - \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L D_2(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \cdot |\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \mathbf{y}_l(f_m)|^2 \geq 0 \right), \quad (3.45)$$

où $D_1(f_m, \boldsymbol{\theta})$ et $D_2(f_m, \boldsymbol{\theta})$ dépendent de $\|\mathbf{g}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta})\|^2$. Soit la forme quadratique Q définie par

$$Q = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L Q_{m,l}, \quad (3.46)$$

avec

$$Q_{m,l} = \mathbf{y}_l^H(f_m) \left[D_2(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) - D_2(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \right] \mathbf{y}_l(f_m), \quad (3.47)$$

et le scalaire

$$q = \sum_{m=1}^M D_1(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) - \sum_{m=1}^M D_1(f_m, \boldsymbol{\theta}_1). \quad (3.48)$$

La probabilité d'erreur binaire $P_e(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{\theta}_0)$ peut s'écrire

$$P_e(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{\theta}_0) = \text{Pr}(Q \geq q). \quad (3.49)$$

On peut montrer que la forme quadratique $Q_{m,l}$ peut s'écrire :

$$Q_{m,l} = \lambda_{1_m} |z_{1_{m,l}}|^2 + \lambda_{2_m} |z_{2_{m,l}}|^2, \quad (3.50)$$

ou $z_{1_{m,l}} \sim \mathcal{CN}(0, 1)$, $z_{2_{m,l}} \sim \mathcal{CN}(0, 1)$ sont des variables aléatoires indépendantes et λ_{1_m} , λ_{2_m} sont les deux valeurs propres non-nulles de

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}}^{1/2}(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \left[D_2(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) - D_2(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \right] \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{y}}^{1/2}(f_m, \boldsymbol{\theta}_0). \quad (3.51)$$

Ainsi, en utilisant les équations (3.19), (3.20), (3.21) et les résultats ci-dessus, nous montrons que la probabilité d'erreur binaire s'exprime de la façon suivante

$$P_e(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{\theta}_0) = 1 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{q(j\omega + \beta)}}{j\omega + \beta} \frac{1}{\prod_{m=1}^M (1 + \lambda_{1_m}(j\omega + \beta))^L (1 + \lambda_{2_m}(j\omega + \beta))^L} d\omega, \quad (3.52)$$

pour n'importe quel réel $\beta > 0$ tel que $1 + \beta\lambda_{1_m} > 0$, $1 + \beta\lambda_{2_m} > 0$.

Le calcul des valeurs propres en absence d'inadéquations a été réalisé par Xu *et al.* [Xu11b], et n'est pas présenté ici.

3.3.2 Erreur asymptotique

En plus du calcul des probabilités d'erreur binaires, le MEI nécessite le calcul d'une approximation de l'erreur asymptotique de l'estimateur pour caractériser les performances dans le régime asymptotique. En l'absence d'inadéquations, l'erreur asymptotique de l'estimateur du MV peut être obtenue à l'aide de la BCR. En présence d'inadéquations cependant, la BCR n'est plus une approximation valide et il faut recourir à une autre stratégie. On présente ici la borne de Cramer-Rao ainsi qu'une méthode d'approximation de l'erreur locale en présence d'inadéquations pour le modèle de signal déterministe.

3.3.2.1 En l'absence d'inadéquations : borne de Cramer-Rao

La borne de Cramer-Rao s'obtient en prenant $\mathbf{h}(\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \ln p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}}$ dans l'inégalité de covariance (3.8). Elle établit que l'EQM de tout estimateur non-biaisé obéit à

$$\text{EQM}_{\text{locale}}(\boldsymbol{\theta}_v) \geq \boldsymbol{\Sigma}_{BCR}(\boldsymbol{\theta}_v) = \mathbf{J}_{\mathbf{D}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_v), \quad (3.53)$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_{BCR}(\boldsymbol{\theta}_v)$ est la BCR en $\boldsymbol{\theta}_v$ et $\mathbf{J}_{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\theta})$ est la matrice d'information de Fisher locale définie par :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\theta}) = -E_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^H \right]. \quad (3.54)$$

Le calcul de la BCR passe par le calcul et l'inversion de la matrice de Fisher. Ce calcul et son résultat est laissé en annexe D.

3.3.2.2 En présence d'inadéquations : approximation locale

Lorsqu'on travaille avec un autre estimateur que l'estimateur du MV ou que l'on est en présence d'inadéquations, il faut trouver une autre manière d'approximer l'erreur asymptotique car la borne de Cramer-Rao n'est plus une approximation valide. Dans les problèmes de formation de voies, la stratégie adoptée consiste à réaliser un développement limité de l'erreur pour approximer la variance et le biais de l'estimateur [Vaidyanathan95, Hawkes98, Richmond06b, Ferréol08, Richmond12]. La formation de voies par la méthode classique et par la méthode de Capon en présence et en l'absence d'inadéquations a notamment été traitée pour les modèles de signal source stochastique [Vaidyanathan95, Hawkes98] et déterministe [Richmond06b, Richmond12]. Nous développons ici le même type d'approche pour l'estimateur du MVD du MFP en présence d'inadéquations. L'originalité du travail repose également sur la considération d'un développement limité à RSB infini et non pas à nombre d'observations infini comme c'est le cas dans tous les articles précités. Nous pensons qu'un développement limité à RSB infini est ici plus légitime car : (i) dans beaucoup d'applications du MFP on est amené à travailler avec une seule observation ou peu d'observations, (ii) l'analyse des performances du MFP par rapport au RSB est plus naturelle que par rapport au nombre d'observations, (iii) la consistance et l'efficacité des estimateurs du MV déterministes sont généralement obtenues à RSB infini et non pas à nombre d'observations infini contrairement à leurs homologues stochastiques [Renaux06]. On présente ici les étapes principales du calcul et les résultats, les détails sont reportés en annexe F.

L'EQM est dans un premier temps exprimée en introduisant le paramètre $\boldsymbol{\theta}_f$ qui maximise la fonction d'ambiguïté en présence des inadéquations (cf figure 3.3) :

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{y}} \left[\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta}_v \right) \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta}_v \right)^T \right] &= E_{\mathbf{y}} \left[\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \right] \\ &+ E_{\mathbf{y}} \left[\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right] \mathbf{b}_{inf}^T(\boldsymbol{\theta}_v) + \mathbf{b}_{inf}(\boldsymbol{\theta}_v) E_{\mathbf{y}} \left[\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right]^T \\ &+ \mathbf{b}_{inf}(\boldsymbol{\theta}_v) \mathbf{b}_{inf}^T(\boldsymbol{\theta}_v), \end{aligned} \quad (3.55)$$

où $\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta}_f$ et $\mathbf{b}_{inf}(\boldsymbol{\theta}_v) = \boldsymbol{\theta}_f - \boldsymbol{\theta}_v$. La quantité $\mathbf{b}_{inf}(\boldsymbol{\theta}_v)$ est le biais à RSB infini et $\Delta\boldsymbol{\theta}$ est l'erreur par rapport à $\boldsymbol{\theta}_f$. La valeur de $\boldsymbol{\theta}_f$ et donc le biais $\mathbf{b}_{inf}(\boldsymbol{\theta}_v)$ s'obtiennent aisément en analysant la fonction d'ambiguïté en présence d'inadéquations. Une approximation de l'EQM asymptotique s'obtient alors en calculant une approximation asymptotique de $E_{\mathbf{y}} [\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}^T]$ et $E_{\mathbf{y}} [\Delta\hat{\boldsymbol{\theta}}]$.

Soit $C(\boldsymbol{\theta})$ le critère du MVD incohérent (introduit au chapitre 2 eq. (2.14)) dans le cas général où le modèle $\mathbf{g}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta})$ utilisé pour réaliser l'inversion n'est pas nécessairement identique au modèle $\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})$ suivi par les données $\mathbf{y}_{m,l} \sim \mathcal{CN}(s_l(f_m)\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v), \sigma_{\mathbf{w}}(f_m)\mathbf{I}_N)$:

$$\begin{aligned} C(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{|\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{y}_l(f_m)|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)}, \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{R}_{l,m} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

où $\mathbf{R}_{l,m} = \mathbf{y}_l(f_m) \mathbf{y}_l^H(f_m)$. Pour $i = 1 \dots N$, on réalise un développement de Taylor à l'ordre 1 de $\frac{\partial C}{\partial \theta_i}$ à RSB infini (θ_i est la i^e composante du vecteur de paramètre $\boldsymbol{\theta}$), c'est à dire en $\boldsymbol{\theta}_f$ et $\mathbf{R}_{l,m}^\infty = |s_{l,m}|^2 \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v) \mathbf{g}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_v)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \theta_i}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{R}_{l,m}) &\approx \frac{\partial C}{\partial \theta_i}(\boldsymbol{\theta}_f, \mathbf{R}_{l,m}^\infty) \\ &+ \frac{\partial^2 C}{\partial \boldsymbol{\theta}^T \partial \theta_i}(\boldsymbol{\theta}_f, \mathbf{R}_{l,m}^\infty) \Delta\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &+ \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \text{tr} \left\{ \left[\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{R}_{l,m} \partial \theta_i}(\boldsymbol{\theta}_f, \mathbf{R}_{l,m}^\infty) \right]^T \Delta \mathbf{R}_{l,m} \right\}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

où $\Delta \mathbf{R}_{l,m} = \mathbf{R}_{l,m} - \mathbf{R}_{l,m}^\infty$. En utilisant des formules classiques de dérivation de vecteurs et de matrices on obtient

$$\frac{\partial C}{\partial \theta_i}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{R}_{l,m}) = \text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \frac{\mathbf{R}_{l,m}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}) \right], \quad (3.58)$$

puis

$$\frac{\partial^2 C}{\partial \mathbf{R}_{l,m} \partial \theta_i}(\boldsymbol{\theta}_f, \mathbf{R}_{l,m}^\infty) = \text{Re} \left[\frac{2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^*(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \theta_i} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^T(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right]. \quad (3.59)$$

La matrice $\Delta \mathbf{R}_{l,m}$ est hermitienne, on a donc la relation

$$\text{tr} \left\{ \text{Re} \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^*(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \theta_i} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^T(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right]^T \Delta \mathbf{R}_{l,m} \right\} = \text{Re} \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \theta_i} \Delta \mathbf{R}_{l,m} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right]. \quad (3.60)$$

De plus, la quantité $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est l'estimée réalisée avec les données mesurées $\mathbf{R}_{l,m}$, donc

$$\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{R}_{l,m}) = \mathbf{0}_{N \times 1}, \quad (3.61)$$

et la quantité $\boldsymbol{\theta}_f$ est l'estimée réalisée avec les donnée $\mathbf{R}_{l,m}^\infty$ (c'est à dire à RSB infini), donc

$$\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_f, \mathbf{R}_{l,m}^\infty) = \mathbf{0}_{N \times 1}. \quad (3.62)$$

Au final, en utilisant ces trois relations dans le système d'équations formé par (3.57) pour $i = 1 \cdots N$, on obtient

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \approx & - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \boldsymbol{\theta}^T \partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_f, \mathbf{R}_{l,m}^\infty) \right)^{-1} \\ & \times \text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\Delta \mathbf{R}_{l,m}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

L'extrapolation de $E_{\mathbf{y}} [\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}]$ et $E_{\mathbf{y}} [\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}^T]$ à partir de cette expression est un exercice calculatoire assez fastidieux et est réalisé dans l'annexe F. Le résultat final est donné ici. On pose

$$\mathbf{a}_m = \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f), \quad (3.64)$$

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v), \quad (3.65)$$

$$\mathbf{D}_m = \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T}, \quad (3.66)$$

et on définit la matrice \mathbf{F} de taille $N \times N$ tel que

$$[\mathbf{F}]_{i,j} = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \frac{|s_{l,m}|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \text{Re} \left[\left(\frac{\partial^2 \mathbf{a}_m}{\partial \theta_j \partial \theta_i} \right)^H \mathbf{b}_m \mathbf{b}_m^H \mathbf{a}_m + \left(\frac{\partial \mathbf{a}_m}{\partial \theta_i} \right)^H \mathbf{b}_m \mathbf{b}_m^H \left(\frac{\partial \mathbf{a}_m}{\partial \theta_j} \right) \right]. \quad (3.67)$$

Les quantités désirées s'expriment alors comme suit

$$E_{\mathbf{y}} [\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}] = -\mathbf{F}^{-1} \text{Re} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \mathbf{D}_m^H \mathbf{a}_m \right], \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{y}} [\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}^T] = & \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-1} \text{Re} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\mathbf{D}_m^H \mathbf{D}_m + \mathbf{D}_m^H \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T \mathbf{D}_m^* \right) \right. \\ & + \frac{|s_{l,m}|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \left(\mathbf{D}_m^H \mathbf{b}_m \mathbf{b}_m^H \mathbf{D}_m + \mathbf{D}_m^H \mathbf{b}_m \mathbf{b}_m^H \mathbf{a}_m \mathbf{a}_m^T \mathbf{D}_m^* + \mathbf{D}_m^H \mathbf{D}_m \mathbf{a}_m^H \mathbf{b}_m \mathbf{b}_m^H \mathbf{a}_m \right. \\ & \left. \left. + \mathbf{D}_m^H \mathbf{a}_m \mathbf{b}_m^T \mathbf{D}_m^* \mathbf{b}_m^H \mathbf{a}_m \right) \right] \mathbf{F}^{-1} + E_{\mathbf{y}} [\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}] E_{\mathbf{y}} [\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}]^T. \end{aligned} \quad (3.69)$$

On peut montrer que le modèle déterministe cohérent est un cas particulier plus simple du modèle déterministe incohérent. On peut en effet se ramener au cas déterministe avec une seule fréquence et une seule observation en exprimant les observations comme un unique vecteur tel que réalisé dans l'équation (3.36) et en exprimant les fonctions de Green comme un unique vecteur tel que réalisé dans l'équation (3.37).

3.4 Application

3.4.1 Implémentation numérique

3.4.1.1 Évaluation des probabilités d'erreur binaires

Le calcul de la probabilité d'erreur $P_e(\boldsymbol{\theta}_1|\boldsymbol{\theta}_0)$ nécessite l'évaluation numérique d'une intégrale mono-dimensionnelle entre $-\infty$ et $+\infty$ (équations (3.30), (3.40) et (3.52)). En général, l'intégrande est fortement concentrée autour de son maximum en $\omega = 0$ et oscille légèrement lorsqu'elle décroît vers zéro. Un exemple d'intégrande typique est représenté sur la figure 3.6. L'intégration numérique de ce type d'intégrande peut être réalisée à l'aide de méthodes standard d'intégrations. Pour nos simulations, nous avons utilisé la fonction *quadgk* de Matlab qui s'est avérée à la fois rapide et précise. En outre, l'évaluation de l'intégrale nécessite d'assigner une valeur au paramètre β . Ce paramètre doit être choisi tel que $0 < \beta < \frac{1}{\max(-\lambda_{1m,2m})}$. La valeur de β a une influence sur la valeur maximale de l'intégrande en $\omega = 0$ et sur la vitesse d'amortissement des oscillations. En pratique, une valeur de β trop proche de sa limite supérieure induit une décroissance lente des oscillations pouvant causer des difficultés lors de l'évaluation de l'intégrale. Un choix de β dans l'intervalle $\left[\frac{1}{1000 \times \max(-\lambda_{1m,2m})}, \frac{1}{5 \times \max(-\lambda_{1m,2m})}\right]$ permet d'éviter ces difficultés. Aussi, la valeur de β qui minimise l'intégrande en $\omega = 0$ (obtenue numériquement) apparaît être un très bon choix, elle permet d'obtenir une décroissance rapide de l'intégrale ainsi qu'une valeur maximale modérée en $\omega = 0$.

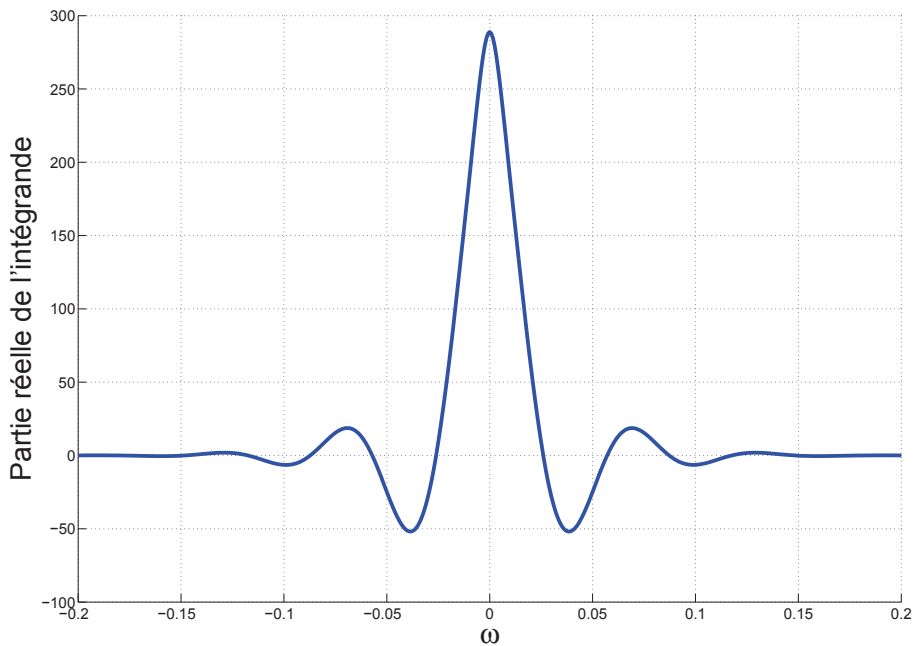


FIGURE 3.6 – Exemple d'intégrande à intégrer numériquement pour évaluer les probabilités d'erreur binaires. Seule la partie réelle de l'intégrande est représentée car la partie imaginaire ne contribue pas à l'intégrale (le résultat est réel).

3.4.1.2 Mise en place du MEI

La sélection des paramètres θ_n de l'équation (3.17) est une étape importante pour l'analyse des performances à l'aide du MEI. Cette sélection peut être réalisée manuellement mais cela est assez fastidieux surtout si de multiples analyses du MEI sont réalisées sur l'*a priori* $p_\theta(\theta)$ pour obtenir l'EQM globale. Dans nos simulations, nous sélectionnons les paramètres θ_n automatiquement en cherchant les N_o plus grand maxima locaux de la fonction d'ambiguïté. Le choix du nombre de maxima locaux N_o peut être basé sur la structure observée de la fonction d'ambiguïté. Dans les illustrations qui suivent nous prenons $N_o = 13$. Il faut cependant noter que les résultats se sont révélés être peu sensibles au choix de N_o dans la zone asymptotique et la zone de décrochement ($N_o = 8$ or $N_o = 20$ donnent des résultats similaires). Dans la zone de non-information l'EQM obtenue par le MEI peut être très supérieure à l'EQM de l'estimateur car la somme des probabilités $\sum_{n=1}^{N_o} P_e(\theta_n|\theta_0)$ de l'équation (3.17) peut devenir supérieure à 1. Une manière d'éviter ce problème consiste à écrêter l'EQM par l'EQM résultant d'un choix uniforme de l'estimée sur le support des paramètres. Le MEI peut être délicat à mettre en place si le jeu de paramètre θ est de grande dimension car il est difficile d'effectuer une recherche de maxima locaux dans un espace de grande dimension. Son application pour les problèmes d'inversion géoacoustique complexes peut donc être difficile, les problèmes de localisation (distance et profondeur) par contre se prêtent bien au MEI.

3.4.1.3 Évaluation de la BZZ

Les deux intégrales de la BZZ sont à évaluer numériquement. Ces intégrations peuvent être réalisées sur une grille, cependant les pas d'intégrations doivent être choisis avec précaution. La première intégrale sur les paramètre θ dans les équations (3.14) et (3.15) ne nécessite pas une grille très fine car la probabilité $P_{min}(\theta, \theta + \Delta)$ varie lentement avec θ . Un pas d'intégration plus large peut considérablement réduire le temps de calcul sans détériorer la précision. La deuxième intégrale sur Δ peut par contre nécessiter un petit pas d'intégration pour pleinement prendre en compte les erreurs dans la zone asymptotique. La BZZ de l'équation (3.15) supporte en théorie des paramètres vectoriels, cependant la complexité du calcul augmente considérablement dès qu'une dimension supplémentaire est ajoutée. La BZZ supporte donc difficilement les problèmes dans lesquels le jeu de paramètres est de taille supérieure à deux.

3.4.2 Illustrations

Les résultats présentés dans ce chapitre sont éprouvés sur un problème de localisation en distance par MFP dans un environnement petit fond. La configuration pratique est présentée sur la figure 3.7. Le guide d'onde est un guide de Pekeris [Pekeris48], c'est à dire un guide composé d'une couche d'eau dans laquelle la célérité et la densité sont constantes, et reposant sur un socle semi-infini dans lequel la célérité et la densité sont également constantes. Ce guide d'onde est classiquement utilisé pour modéliser des environnements

petits fonds. Deux scénarios sont utilisés pour éprouver les résultats, un scénario sans inadéquations et un scénario en présence d'inadéquations sur les paramètres physiques du guide d'onde. Dans les deux cas le modèle utilisé pour réaliser l'inversion a les paramètres physiques suivants : profondeur d'eau $D = 100$ m, célérité dans l'eau $c_w = 1500$ m.s⁻¹, densité dans l'eau $\rho_w = 1000$ kg.m⁻³, célérité dans le fond $c_b = 1800$ m.s⁻¹ et densité dans le fond $\rho_b = 2000$ kg.m⁻³. L'antenne réceptrice est une antenne verticale de $N = 12$ capteurs régulièrement espacés entre $z_1 = 5$ m et $z_N = 95$ m. La profondeur de la source est supposée connue et fixée à $z_s = 30$ m. On dispose de $L = 5$ observations pour $M = 8$ fréquences espacées de manière logarithmique entre 50 – 500 Hz. Les fonctions de Green sont calculés à l'aide de la théorie des modes.

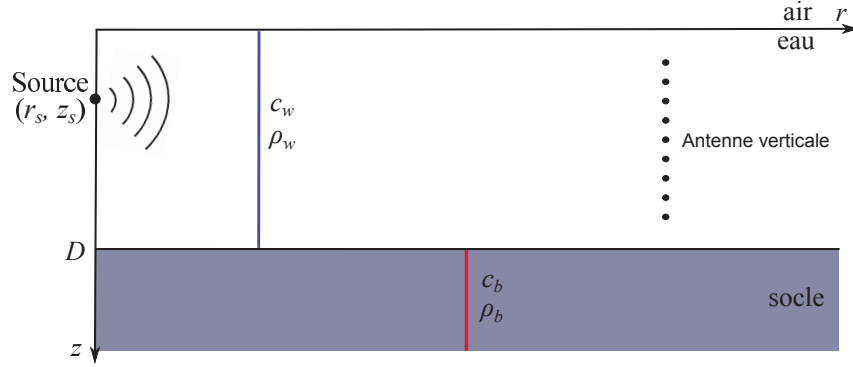


FIGURE 3.7 – Configuration pratique.

3.4.2.1 En l'absence d'inadéquations

En l'absence d'inadéquation, le guide d'onde réel (i.e. celui utilisé pour simuler les données) est le même que celui utilisé pour réaliser l'inversion. On se place ici dans un cadre bayésien, la distance de la source est inconnue avec un *a priori* uniforme sur l'intervalle $\theta = r = [4000, 6000]$ m. La BZZ et le MEI sont implémentés à l'aide des résultats développés dans ce chapitre. Les deux intégrations numériques de la BZZ dans l'équation (3.14) sont réalisées avec les pas d'intégrations $\delta\theta = 80$ m and $\delta h = 0.25$ m pour le modèle stochastique et le modèle déterministe incohérent, et avec $\delta h = 0.125$ m pour le modèle déterministe cohérent. L'analyse du MEI est moyennée sur $N_l = 25$ positions de l'*a priori* uniforme pour approximer l'EQM globale. Un nombre de position plus grand ne change pas significativement le résultat. La BCR bayésienne (BCRB) et la BCR hybride (BCRH) présentées dans l'annexe E sont également évaluées. Des simulations de Monte-Carlo moyennées sur $N_l = 25$ positions de l'*a priori* uniforme sont réalisées avec $N_c = 5000$ itérations pour chaque position et chaque RSB. Le RSB est défini par $\gamma(f_m) = \frac{\sigma_s^2(f_m)}{\sigma_w^2(f_m)} \|\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v)\|^2$ pour le modèle stochastique et par l'équation (3.33) pour le modèle déterministe. On prend le même RSB pour toutes les fréquences et toutes les observations.

Les résultats sont présentés sur la figure 3.8 pour le modèle déterministe incohérent, sur la figure 3.9 pour le modèle déterministe cohérent et sur la figure 3.10 pour le modèle stochastique. Les deux méthodes, la BZZ et le MEI, donnent de bons résultats dans

les trois régions de RSB. Le phénomène de décrochement est bien pris en compte et les performances asymptotiques sont bien décrites. On peut noter que l'EQM obtenue avec le MEI est parfois supérieure à l'EQM obtenue avec les simulations de Monte-Carlo. Ce comportement est normal car le MEI n'est pas une borne de performance mais une approximation. Quelques observations supplémentaires peuvent également être réalisées. On peut voir que le modèle cohérent diffère grandement des deux autres. Comme on pouvait s'y attendre ses performances sont bien meilleures, ce qui donne un aperçu de l'avantage que peut procurer l'ajout d'informations sur le signal source. Les modèles déterministe incohérent et stochastique donnent des résultats assez proches. Le seuil de décrochement du modèle déterministe est 1.5 dB plus faible que celui du modèle stochastique et leurs EQM sont du même ordre de grandeur. Cela s'explique par le fait que les hypothèses sous-jacentes de ces deux modèles ne sont pas si différentes, dans les deux cas le signal est mal connu.

L'implémentation des trois méthodes (Monte-Carlo, BZZ et MEI) permet de comparer les temps de calcul. Dans cet exemple, la BZZ permet de diviser le temps de calcul d'un facteur 20 environ par rapport aux simulations de Monte-Carlo, alors que le MEI permet de diviser le temps de calcul d'un facteur légèrement inférieur au nombre de simulations de Monte-Carlo effectuées N_c multiplié par le nombre de points de RSB testés soit environ d'un facteur 90000 (pour le MEI on analyse une seule fois la fonction d'ambiguïté à la recherche des N_o maxima locaux alors que pour les simulations de Monte-Carlo il faut faire N_c évaluations de la fonction de coût par RSB testé). Ces chiffres permettent de se rendre compte de l'intérêt de la BZZ et surtout du MEI pour analyser des performances.

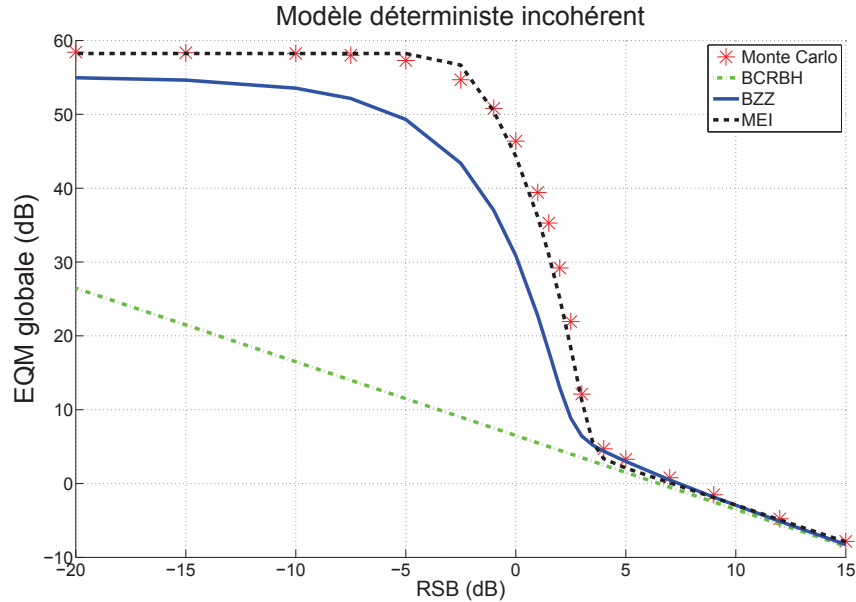


FIGURE 3.8 – Borne de Cramer-Rao bayésienne hybride (BCRBH), borne de Ziv-Zakai (BZZ), et méthode des erreurs d'intervalle (MEI) pour l'estimation de la distance avec le modèle déterministe incohérent. Ligne traitillée-pointillée verte : BCRBH ; ligne continue bleue : BZZ ; ligne tiretée noire : MEI ; * rouges : simulations de Monte-Carlo.

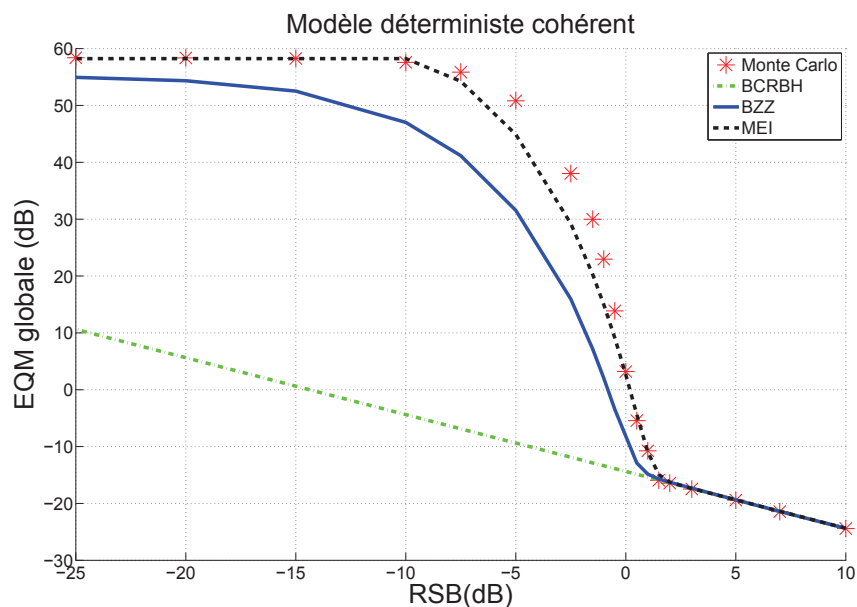


FIGURE 3.9 – Borne de Cramer-Rao bayésienne hybride (BCRBH), borne de Ziv-Zakai (BZZ), et méthode des erreurs d'intervalle (MEI) pour l'estimation de la distance avec le modèle déterministe cohérent. Ligne traitillée-pointillée verte : BCRBH ; ligne continue bleue : BZZ ; ligne tiretée noire : MEI ; * rouges : simulations de Monte-Carlo.

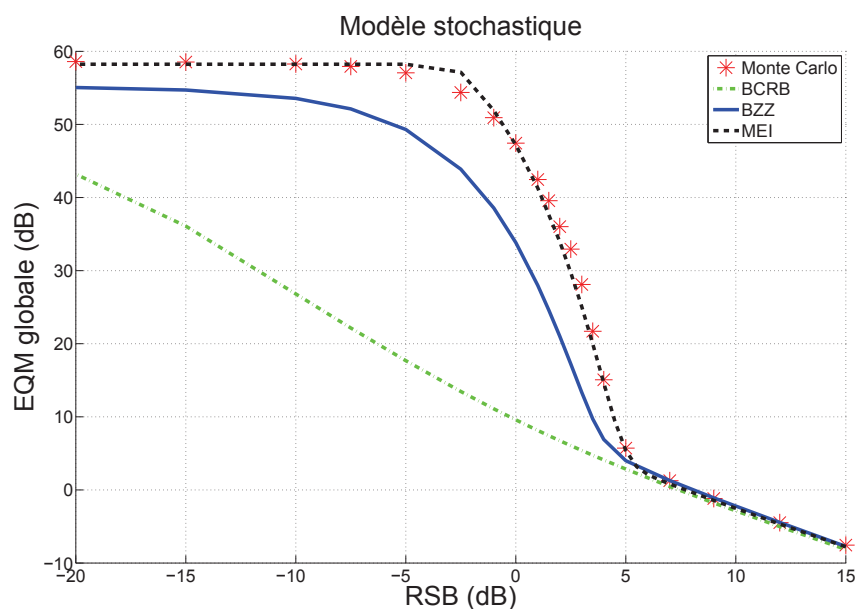


FIGURE 3.10 – Borne de Cramer-Rao bayésienne (BCRB), borne de Ziv-Zakai (BZZ), et méthode des erreurs d'intervalle (MEI) pour l'estimation de la distance avec le modèle stochastique. Ligne traitillée-pointillée verte : BCRB ; ligne continue bleue : BZZ ; ligne tiretée noire : MEI ; * rouges : simulations de Monte-Carlo.

3.4.2.2 En présence d'inadéquations

Les résultats développés pour le MEI en présence d'inadéquations sont également éprouvés ici. On considère deux cas test. Dans le premier cas la source est en $\theta_v = r_v = 5000$ m et l'environnement réel est le suivant : profondeur d'eau $D = 99.86$ m, célérité dans l'eau $c_w = 1500$ m.s⁻¹, densité dans l'eau $\rho_w = 1000$ kg.m⁻³, célérité dans le fond $c_b = 1750$ m.s⁻¹ et densité dans le fond $\rho_w = 1900$ kg.m⁻³. Dans le deuxième cas la source est à $\theta_v = r_v = 5100$ m et l'environnement réel est le suivant : profondeur d'eau $D = 99$ m, célérité dans l'eau $c_w = 1510$ m.s⁻¹, densité dans l'eau $\rho_w = 1000$ kg.m⁻³, célérité dans le fond $c_b = 1750$ m.s⁻¹ et densité dans le fond $\rho_w = 1800$ kg.m⁻³. Des simulations de Monte-Carlo avec $N_c = 5000$ itérations pour chaque RSB sont réalisées. L'EQM dans la région asymptotique peut être dominée par le biais d'estimation $\theta_f - \theta_v$ à RSB infini. Pour avoir une meilleure appréciation des erreurs dans cette région, on présente également les résultats avec une EQM sans biais

$$\text{EQM}_{\text{locale_sansbiais}}(\boldsymbol{\theta}_v) = E_{\mathbf{y}} \left[\left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta}_f \right) \left(\hat{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{y}) - \boldsymbol{\theta}_f \right)^T \right]. \quad (3.70)$$

Cette EQM correspond à l'EQM dont on a calculé une approximation asymptotique (équation (3.69)).

Les résultats sont présentés sur la figure 3.11 pour le premier cas test et sur la figure 3.12 pour le deuxième cas test. La BCR est également reportée sur les figures. Dans les deux cas on peut constater la bonne capacité du MEI à prédire les performances de l'estimateur du MV en présence d'inadéquations. Le phénomène de décrochement est bien pris en compte et les performances asymptotiques sont bien décrites. Le deuxième cas test constitue pourtant un cas potentiellement difficile pour le MEI car sous l'effet des inadéquations, le lobe principal se sépare en deux sous-lobes d'amplitudes proches. C'est ce qui explique l'augmentation légère de l'EQM sans biais à partir de 12 dB de RSB : la probabilité de passer du plus grand sous-lobe au plus petit sous-lobe devient significative. Cette augmentation de l'EQM sans biais se traduit d'ailleurs par une légère diminution (à peine visible car masquée par le biais) de l'EQM car le plus petit sous-lobe est plus proche de la vraie valeur du paramètre. On remarque dans les deux cas test l'effet significatif des inadéquations : le biais limite les performances à fort RSB et l'EQM sans biais est bien plus importante que la BCR car le lobe principale c'est adoucit. La superposition des résultats sans inadéquation (non-fait ici pour ne surcharger les figures) montrerait également une augmentation du seuil de décrochement.

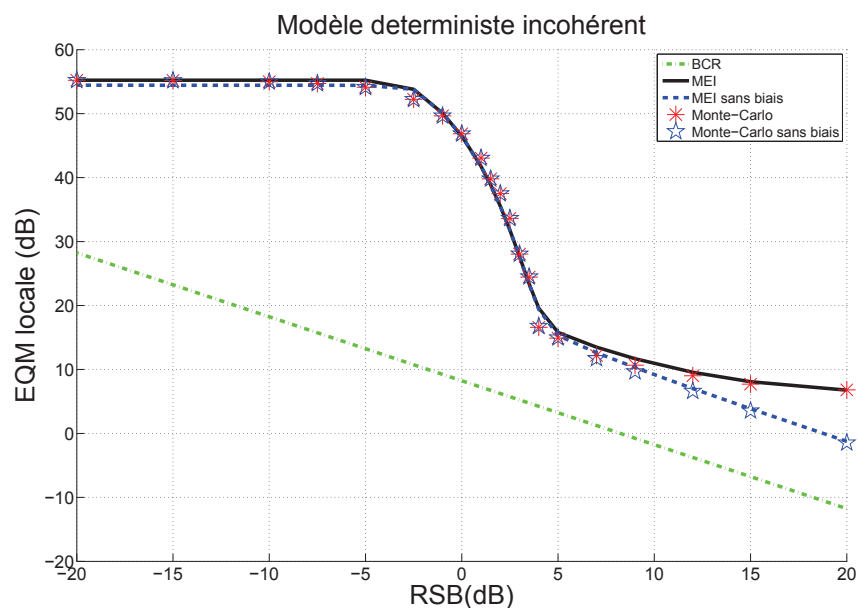


FIGURE 3.11 – Cas test 1 : méthode des erreurs d'intervalle (MEI) pour l'estimation de la distance avec le modèle déterministe incohérent en présence d'inadéquations. Ligne traitillée-pointillée verte : BCR ; ligne continue noire : MEI ; ligne tiretée bleue : MEI sans biais ; * rouges : simulations de Monte-Carlo ; étoiles bleues : simulations de Monte-Carlo sans biais.

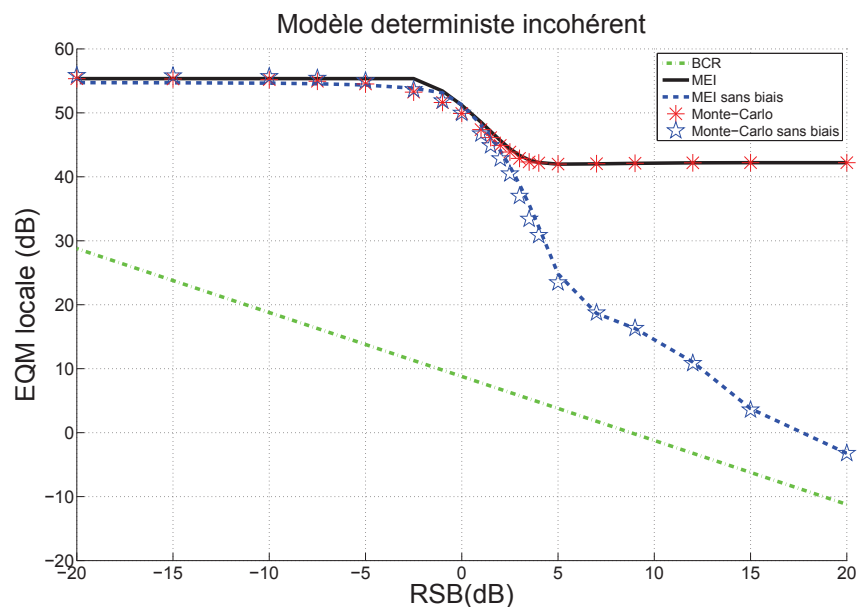


FIGURE 3.12 – Cas test 2 : méthode des erreurs d'intervalle (MEI) pour l'estimation de la distance avec le modèle déterministe incohérent en présence d'inadéquations. Ligne traitillée-pointillée verte : BCR ; ligne continue noire : MEI ; ligne tiretée bleue : MEI sans biais ; * rouges : simulations de Monte-Carlo ; étoiles bleues : simulations de Monte-Carlo sans biais.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé des outils statistiques de traitement du signal permettant de prédire les performances des estimateurs du MV présentés au chapitre précédent. La borne minimale d'estimation de Ziv-Zakai (BZZ) et la méthode des erreurs d'intervalle (MEI) ont été considérées. Contrairement à la BZZ, le MEI permet de prendre en compte les inadéquations dans l'analyse des performances. Ces méthodes reposent toutes deux sur le calcul d'une probabilité d'erreur binaire (en l'absence ou en présence d'inadéquations). Nous avons développé une technique de calcul de cette probabilité d'erreur binaire pour les deux modèles de signal source que sont le modèle stochastique et le modèle déterministe. Le MEI nécessite également le calcul d'une approximation de l'EQM asymptotique. En l'absence d'inadéquations cette EQM est donnée par la borne de Cramer-Rao. En présence d'inadéquations nous recourons à un développement limité de l'erreur. Nous avons réalisé ce calcul dans le cadre du modèle déterministe. La BZZ et le MEI ont ensuite été éprouvés sur des exemples de localisation de source en distance (en l'absence et en présence d'inadéquations). Ces exemples permettent également de constater l'avantage considérable que procurent la BZZ et le MEI par rapport aux simulations de Monte-Carlo en terme de temps de calcul.

Dans le chapitre 5 nous utiliserons les outils développés ici pour analyser les performances d'un problème de localisation particulier. À ce titre, le chapitre 5 constituera une illustration du type d'analyse qui peut être menée à l'aide de ces outils. Le travail réalisé dans ce chapitre permet de mesurer l'impact des inadéquations sur les performances du MFP mais n'apporte pas de solution à ce problème. C'est ce que nous allons réaliser au chapitre suivant dans le cadre de la localisation de source.

Chapitre 4

Localisation de source dans un océan incertain

Sommaire

4.1	Etat de l'art	82
4.2	Localisation bayésienne de source avec une fonction de Green incertaine	84
4.2.1	Principe	84
4.2.2	Marginalisation de la fonction de Green	86
4.2.3	Fonction de Green incertaine dans un guide d'onde océanique incertain	88
4.2.3.1	Impact des incertitudes sur la propagation modale .	88
4.2.3.2	Construction de la matrice de covariance	90
4.3	Application	92
4.3.1	Scénarios	92
4.3.2	Illustrations	95
4.3.3	Evaluation des performances par simulations de Monte-Carlo	97
4.4	Conclusion	99

Le MFP est une technique très intéressante pour localiser une source en acoustique sous-marine. Cependant, comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, la localisation d'une source acoustique par MFP s'avère être une tâche délicate lorsque l'environnement océanique n'est pas connu avec précision : la présence d'inadéquations entre l'environnement océanique réel et l'environnement océanique supposé peut largement dégrader les performances de la localisation. Comme il est improbable d'avoir une connaissance parfaite de l'environnement océanique dans des applications réalistes du MFP, les erreurs sur le modèle environnemental sont un problème sérieux et il est nécessaire de mettre en place des stratégies permettant d'atténuer leur effet.

Ce chapitre présente une approche bayésienne à la localisation de source par MFP. La méthode proposée permet d'améliorer la robustesse de la localisation vis-à-vis des incertitudes sur l'environnement océanique et d'obtenir des mesures quantitatives de la confiance pouvant être accordée à chaque estimation. L'incertitude sur le milieu de propagation est prise en compte en considérant la fonction de Green du guide d'onde comme un vecteur aléatoire dont la densité de probabilité représente l'incertitude sur l'environnement océanique.

Nous réalisons tout d'abord un bref état de l'art sur les méthodes de localisation robuste aux incertitudes sur l'environnement puis nous introduisons notre méthode de localisation. La dernière partie est consacrée à l'application de cette méthode sur des données simulées afin d'évaluer sa robustesse et comparer ses performances par rapport à d'autres méthodes.

4.1 Etat de l'art

Plusieurs méthodes ont été proposées par le passé pour améliorer la robustesse de la localisation vis-à-vis des incertitudes sur le milieu de propagation. Nous établissons ici un état de l'art sur ces méthodes avant de présenter notre approche.

Dans le cas de la localisation de source, le jeu de paramètres inconnus θ représente la distance et la profondeur de la source. Une des stratégies couramment utilisée pour rendre l'estimation de θ robuste aux incertitudes de l'environnement consiste à ajouter des paramètres environnementaux θ_{env} au problème inverse comme paramètres inconnus supplémentaires [Collins91, Dosso93, Baer06, Richardson91, Shorey94, Shorey98, Dosso03, Dosso07b, Dosso11b]. La localisation est alors rendue robuste aux incertitudes vis-à-vis de ces paramètres. Deux démarches générales d'estimation, à savoir la *focalisation* et la *marginalisation*, ont été considérées. La focalisation consiste à chercher la solution optimale au sens du maximum de vraisemblance conjointement pour les paramètres de localisations et les paramètres environnementaux [Collins91, Dosso93, Baer06]. La marginalisation formule le problème dans un cadre bayésien [Richardson91, Shorey94, Shorey98, Dosso03, Dosso07b, Dosso11b]. L'inférence est effectuée à l'aide de la densité de probabilité *a posteriori* (DPP) des paramètres de localisation obtenue en intégrant (marginalisant) la DDP

globale par rapport aux paramètres environnementaux :

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) = \int p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\theta}_{\text{env}}|\mathbf{y})d\boldsymbol{\theta}_{\text{env}}. \quad (4.1)$$

Les estimateurs bayésiens classiques peuvent alors être utilisés pour estimer la position de la source. En outre, l'analyse de cette DPP permet de mesurer quantitativement l'incertitude sur la position de la source, ce qui peut être d'une importance cruciale en contexte opérationnel pour la prise de décision. Bien que très intéressantes, les techniques de focalisation et de marginalisation reposent sur une paramétrisation précise du guide d'onde et nécessitent un temps de calcul très important lorsqu'il y a beaucoup de paramètres environnementaux car il faut alors simuler le champ acoustique dans un grand nombre d'environnements que ce soit pour rechercher la solution du maximum de vraisemblance ou pour mener à bien l'intégration.

Le matched-mode processing (MMP) est une alternative au MFP qui utilise explicitement la description modale du champ acoustique pour estimer la position de la source. Le MMP sépare d'abord les différents modes propagatifs du champ acoustique puis les compare à des modes simulés pour en déduire la valeur des paramètres d'intérêt [Yang87, Wilson88, Yang90]. Travailler dans l'espace des modes apporte une vision physique au problème d'estimation, la robustesse peut alors être obtenue en retenant uniquement les modes qui sont les moins sensibles aux erreurs sur l'environnement [Yang90, Collison00, Yoo99]. Cependant, la séparation des modes est une étape critique du MMP. Lorsque les modes ne peuvent pas être séparés par des méthodes temps-fréquence comme présenté au chapitre suivant, la séparation des modes est une opération très délicate. Le filtrage des modes à l'aide de l'antenne réceptrice est souvent imparfait, en particulier quand l'antenne ne fournit pas un échantillonnage spatial suffisant du champ acoustique [Yang90, Collison00, Le Courtois14a]. Les erreurs d'estimation des modes peuvent alors considérablement dégrader les performances. Pour surmonter ce problème de séparation des modes tout en améliorant la robustesse aux inadéquations, Tabrikian et al. [Tabrikian97] ont développé un nouvel estimateur du maximum de vraisemblance. L'idée est de considérer le champ acoustique comme une somme de deux types de modes : des modes dit prédictibles peu affectés par l'environnement et des modes non-prédictibles fortement affectés par l'environnement et vus comme des paramètres de nuisances (typiquement les modes que l'on rejette pour le MMP). En présence d'erreurs sur le modèle environnemental, cet estimateur donne de bien meilleures performances que le MMP. En reprenant la même idée, Liu et al. [Liu13] ont ensuite développé un autre estimateur du MV plus simple et légèrement plus robuste. Ces approches modales de la localisation gèrent le problème des inadéquations en ignorant l'information portée par les parties du champ acoustique les plus sensibles à l'environnement océanique. Elles impliquent donc de réaliser un compromis entre sensibilité aux inadéquations et perte d'information sur l'emplacement de la source. Ce compromis n'est jamais simple à réaliser dans la pratique.

4.2 Localisation bayésienne de source avec une fonction de Green incertaine

Nous proposons une approche bayésienne originale à la localisation de source en environnement océanique incertain. Aucun paramètre environnemental n'est ajouté aux paramètres de localisation θ dans le problème inverse. L'idée est de relâcher l'hypothèse selon laquelle la fonction de Green est une quantité déterministe. La fonction de Green est modélisée comme un vecteur aléatoire dont la densité de probabilité représente l'incertitude sur l'environnement. L'impact des incertitudes sur la fonction de Green est approximé en faisant quelques hypothèses concernant l'effet des erreurs de modélisation de l'environnement sur la propagation modale. Ainsi, l'incertitude n'est pas vue exclusivement comme une incertitude sur des paramètres spécifiques du guide d'onde mais plus globalement comme une incertitude sur les phénomènes de propagation, ce qui permet de prendre en compte l'ensemble des facteurs qui influent sur la propagation (structure du guide d'onde, effets range-dependent...). La DPP des paramètres de localisation est obtenue en intégrant la DPP globale par rapport à l'incertitude sur la fonction de Green. Cette intégration ne nécessite pas de simuler la propagation acoustique de façon répétée comme c'est le cas avec la méthode de marginalisation sur les paramètres environnementaux. L'évaluation de l'intégrale par force brute nécessitant un temps de calcul prohibitif, une technique est développée pour accélérer l'intégration ce qui permet de rendre l'ensemble du processus de localisation efficace en temps de calcul (bien plus que les techniques de focalisation ou de marginalisation sur les paramètres environnementaux). Cette méthode a fait l'objet de la soumission d'un article actuellement en cours de révision [Le Gall15b].

Le principe de la localisation de source avec une fonction de Green incertaine est présenté dans la section 4.2.1 qui suit. La méthode proposée nécessite un modèle probabiliste de l'incertitude sur la fonction de Green et une technique d'intégration efficace de la DDP par rapport cette incertitude. La technique d'intégration retenue est décrite dans la section 4.2.2 et la modélisation de l'incertitude sur la fonction de Green pour des environnements océaniques incertains est discutée dans la section 4.2.3.

4.2.1 Principe

L'approche développée s'applique au modèle de signal source déterministe incohérent avec variance du bruit connue ou inconnue, soit aux fonctions de vraisemblance (2.19) et (2.20) données dans le chapitre 2. On rappelle ici ces fonctions de vraisemblance. Lorsque la variance du bruit est connue

$$p(\mathbf{y}|\theta) \propto \prod_{m=1}^M (\pi\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m))^{-LN} \exp\left(-L \frac{\phi_m(\theta)}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)}\right), \quad (4.2)$$

et quand la variance du bruit n'est pas connue

$$p(\mathbf{y}|\theta) \propto \prod_{m=1}^M \exp(-LN \log_e \phi_m(\theta)), \quad (4.3)$$

où

$$\phi_m(\boldsymbol{\theta}) = \text{tr}(\mathbf{R}_m) - \frac{\mathbf{g}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{R}_m \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\mathbf{g}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}, \quad \mathbf{R}_m = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{y}_l(f_m) \mathbf{y}_l^H(f_m). \quad (4.4)$$

Par souci de simplicité, seul le cas mono-fréquentiel est présenté dans ce qui suit, mais les résultats peuvent être facilement étendus au cas multi-fréquentiel en remarquant que les fonctions de vraisemblance multi-fréquentielles (4.2) et (4.3) sont le produit de vraisemblances mono-fréquentielles.

Compte tenu de la cohérence temporelle du canal acoustique sous-marin aux fréquences et distances classiques du MFP [Yang06], on considère la fonction de Green constante sur la durée des L observations. On suppose que la fonction de Green du guide d'onde est un vecteur aléatoire dont la densité de probabilité $p(\mathbf{g}|\boldsymbol{\theta})$ représente l'incertitude liée à l'environnement. La DPP des paramètres de localisation peut alors être obtenue en intégrant la DPP globale sur $p(\mathbf{g}|\boldsymbol{\theta})$

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto \int p(\mathbf{y}|\mathbf{g}, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{g}|\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{g} p(\boldsymbol{\theta}). \quad (4.5)$$

Cette intégration est appelée marginalisation de la fonction de Green. Dans la suite, la dépendance de la fonction de Green \mathbf{g} envers les paramètres de localisation $\boldsymbol{\theta}$ est omise pour plus de clarté. L'*a priori* $p(\mathbf{g})$ vise à caractériser la connaissance *a priori* sur les inadéquations à travers leur impact sur la fonction de Green du guide d'onde. Il s'agit ici d'un *a priori* subjectif. Lorsque l'environnement océanique est incertain, la fonction de Green n'est plus un vecteur déterministe mais un vecteur aléatoire qui peut, en principe, reposer n'importe où dans l'espace vectoriel de dimension N . Cependant, en pratique, la fonction de Green conserve généralement un certain degré de structure et repose préférentiellement dans certaines régions de cet espace. Notons que seul la directivité (et pas l'amplitude) de la fonction de Green est importante ici car la fonction de Green est normalisée dans les fonctions de vraisemblance considérées (cf Eq. (2.21)). En l'absence d'information sur la forme de la distribution de \mathbf{g} , un moyen simple et flexible de spécifier l'*a priori* consiste donc à considérer la fonction de Green comme un vecteur aléatoire gaussien centré complètement caractérisé par sa matrice de covariance définie positive $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{g}}$, $\mathbf{g} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{g}})$. Cette matrice de covariance paramétrise la dispersion statistique de la fonction de Green, et reflète notre connaissance physique de l'effet des incertitudes liées à l'environnement sur la propagation. La figure 4.1 illustre schématiquement ce concept.

La caractérisation de l'incertitude sur l'environnement par le biais de ce modèle sera traitée dans la section 4.2.3. Le paragraphe qui suit présente la stratégie mise en place pour évaluer l'intégrale de l'équation (4.5) avec ce modèle *a priori* $p(\mathbf{g})$ et une matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{g}}$ donnée.

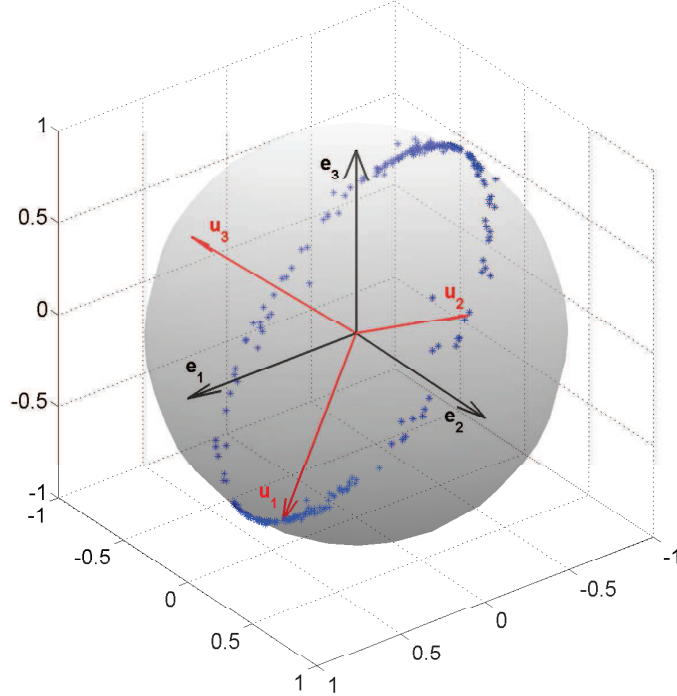


FIGURE 4.1 – Illustration Schématique du modèle probabiliste de la fonction de Green en $N = 3$ dimensions dans un espace réel. Les axes \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 représentent la base canonique. Les axes \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_3 représentent les vecteurs propres de $\Sigma_{\mathbf{g}}$ et les croix représentent des fonctions de Green normalisées générées à partir de $\Sigma_{\mathbf{g}}$. Lorsque l'environnement océanique est incertain, la fonction de Green n'est plus un vecteur déterministe mais un vecteur aléatoire qui peut, en principe, reposer n'importe où dans l'espace vectoriel de dimension N . Cependant, en pratique, la fonction de Green conserve généralement un certain degré de structure et repose préférentiellement dans certaines régions de cet espace. Sur cette illustration schématique, les fonctions de Green présentent une forte orientation selon \mathbf{u}_1 , peuvent aussi présenter une orientation importante selon \mathbf{u}_2 mais présentent une orientation très faible selon \mathbf{u}_3 . Ce comportement est défini par la matrice de covariance $\Sigma_{\mathbf{g}} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H$, où $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]$, $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$ et $\sigma_1 > \sigma_2 \gg \sigma_3$.

4.2.2 Marginalisation de la fonction de Green

La fonction de Green \mathbf{g} est un vecteur de taille $N \times 1$. La marginalisation de la fonction de Green implique donc l'évaluation d'une intégrale N -dimensionnelle. L'évaluation d'une intégrale de grande dimension par force brute nécessite généralement un temps de calcul prohibitif, il faut donc mettre en place d'autres techniques. L'idée développée ici est de réduire cette intégrale N -dimensionnelle à une intégrale mono-dimensionnelle à support fini.

Soit u la quantité

$$u = \frac{1}{\text{tr}(\mathbf{R})} \frac{\mathbf{g}^H \mathbf{R} \mathbf{g}}{\mathbf{g}^H \mathbf{g}}, \quad (4.6)$$

où \mathbf{R} est défini dans l'équation (2.21). Les vraisemblances des équations (4.2) et (4.3) peuvent être exprimées comme des fonctions de u en lieu et place de \mathbf{g} car la quantité ϕ dans l'équation (4.4) peut s'écrire $\phi = \text{tr}(\mathbf{R})(1-u)$. La DPP des paramètres de localisation peut alors être obtenue sans aucune approximation de la façon suivante

$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y}) \propto \int_0^1 p(\mathbf{y}|u)p(u)du p(\boldsymbol{\theta}), \quad (4.7)$$

car u est une variable aléatoire à valeur dans l'intervalle $[0, 1]$ ¹. La variable u est un rapport de formes quadratiques de variables gaussiennes centrées. Sa densité de probabilité $p(u)$ n'est pas connue analytiquement mais peut être calculée à l'aide de résultats sur les formes quadratiques de variables gaussiennes. La fonction de répartition $F_U(u)$ de u peut s'écrire de la façon suivante :

$$F_U(u) = P_r \left(\frac{1}{\text{tr}(\mathbf{R})} \frac{\mathbf{g}^H \mathbf{R} \mathbf{g}}{\mathbf{g}^H \mathbf{g}} < u \right), \quad (4.8)$$

$$= P_r \left(\mathbf{g}^H \left[\frac{\mathbf{R}}{\text{tr}(\mathbf{R})} - u \mathbf{I}_N \right] \mathbf{g} < 0 \right). \quad (4.9)$$

On définit \mathbf{h} tel que $\mathbf{g} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{g}}^{1/2} \mathbf{h}$, où $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{g}}$ est la matrice de covariance de \mathbf{g} présentée dans la section précédente. Cette opération est en fait une opération de blanchiment et $\mathbf{h} \sim \mathcal{CN}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_N)$. La fonction de répartition $F_U(u)$ peut alors s'exprimer ainsi :

$$F_U(u) = P_r \left(\mathbf{h}^H \mathbf{A}_u \mathbf{h} < 0 \right), \quad (4.10)$$

où

$$\mathbf{A}_u = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{g}}^{1/2} \left[\frac{\mathbf{R}}{\text{tr}(\mathbf{R})} - u \mathbf{I}_N \right] \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{g}}^{1/2}. \quad (4.11)$$

Ainsi, $F_U(u)$ est la fonction de répartition en zéro de la forme quadratique $\mathbf{h}^H \mathbf{A}_u \mathbf{h}$. Soient $\{\lambda_{u_i}, i = 1, \dots, P\}$ les valeurs propres positives de la matrice \mathbf{A}_u . Si aucune de ces valeurs propres n'est répétée alors la fonction de répartition vaut [Al-Naffouri09]

$$F_U(u) = 1 - \sum_{i=1}^P \frac{\lambda_{u_i}^{N-1}}{\prod_{l \neq i} (\lambda_{u_i} - \lambda_{u_l})}. \quad (4.12)$$

où P est le nombre de valeurs propres positives de \mathbf{A}_u . Aucune des valeurs propres positives de $\left[\frac{\mathbf{R}}{\text{tr}(\mathbf{R})} - u \mathbf{I}_N \right]$ n'est répétée, mais nous ignorons si cela est suffisant pour assurer qu'aucune des valeurs propres positives de \mathbf{A}_u ne soit répétée. Cependant, cela semble assez plausible et a toujours été le cas durant toutes nos simulations. Dans tous les cas, une expression plus complexe peut être utilisée si certaines valeurs propres positives sont

1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'applique aux matrices semi définie positives \mathbf{R} et $\mathbf{g}\mathbf{g}^H$ où l'opérateur de trace est un produit scalaire, ce qui conduit à la preuve que $u \leq 1$.

répétées [Al-Naffouri09]. La densité de probabilité $p(u)$ peut être calculée en évaluant numériquement la dérivée de $F_U(u)$. L'intégrande de l'équation Eq. (4.7) peut alors être évaluée en un nombre discret de points pour mener à bien l'intégration numérique. En pratique, l'intégration sur une grille régulière de 100 points nous donne des résultats satisfaisants.

Cette section présentait la technique de marginalisation de la fonction de Green pour une matrice de covariance $\Sigma_{\mathbf{g}}$ donnée. La section qui suit développe une approche permettant de construire une matrice de covariance $\Sigma_{\mathbf{g}}$ caractérisant l'incertitude sur la fonction de Green.

4.2.3 Fonction de Green incertaine dans un guide d'onde océanique incertain

La matrice de covariance $\Sigma_{\mathbf{g}}$ caractérise l'incertitude sur la fonction de Green due à l'incertitude sur le milieu de propagation océanique. La méthode présentée dans la section précédente est applicable à n'importe quelle matrice définie positive $\Sigma_{\mathbf{g}}$. De nombreuses approches peuvent être envisagées pour concevoir une telle matrice. La matrice $\Sigma_{\mathbf{g}}$ pourrait simplement être estimée une bonne fois pour toute à partir de quelques réalisations de la fonction de Green issues de réalisations des paramètres environnementaux [Shorey94, Krolik96]. Cependant, l'incertitude sur l'environnement est traité ici comme une incertitude sur la fonction de Green, ce qui permet de représenter plus globalement l'incertitude comme une incertitude sur les phénomènes de propagation. Nous développons donc ici une approche qui se base sur l'influence des erreurs de modélisation de l'environnement sur la propagation modale pour estimer la matrice $\Sigma_{\mathbf{g}}$. L'incertitude n'est alors pas limitée à une incertitude sur des paramètres spécifiques du guide d'onde mais comprends plus généralement l'ensemble des facteurs susceptibles d'affecter la propagation (paramètres du guide d'onde, structure du guide d'onde, effets range-dependent...). Un autre avantage potentiel de cette approche est de pouvoir se baser sur des observations acoustiques *in situ* pour construire la matrice de covariance (et donc sans faire d'hypothèses sur l'incertitude environnementale sous-jacente).

Des hypothèses quant à l'effet de l'incertitude environnementale sur la propagation modale sont d'abord réalisées, puis la méthodologie permettant de construire la matrice $\Sigma_{\mathbf{g}}$ en utilisant ces hypothèses est présentée.

4.2.3.1 Impact des incertitudes sur la propagation modale

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, en milieu petit fond et aux basses fréquences, la propagation acoustique est bien décrite par la théorie des modes. On rappelle brièvement les concepts introduits au chapitre 1 sur la théorie des modes avant d'avancer quelques hypothèses quant à l'effet des erreurs de modélisation de l'environnement sur la propagation modale et donc sur la fonction de Green.

Rappels sur la théorie des modes

La théorie des modes stipule que dans un guide d'onde *range-independent* la fonction de transfert entre une source acoustique à la profondeur z_s et un récepteur à la profondeur z_r à une distance r_s de la source est :

$$h(f, r_s, z_s, z_r) = Q \sum_{n=1}^{N_{prop}} \Psi_n(f, z_s) \Psi_n(f, z_r) \frac{e^{jk_{rn}(f)r_s}}{\sqrt{k_{rn}(f)r_s}}, \quad (4.13)$$

où k_{rn} et ψ_n sont respectivement le nombre d'onde horizontal et la fonction modale du mode d'ordre n . Ces quantités dépendent des propriétés du milieu de propagation (bathymétrie, propriétés geoacoustiques du fond, et célérité dans la colonne d'eau).

En pratique, différents modes se propagent différemment dans le guide d'onde (cf chapitre 1). Les modes d'ordres faibles tendent à être piégés dans la colonne d'eau et sont fortement affectés par les détails du profil de célérité, alors que les modes d'ordres élevés tendent à pénétrer significativement dans le fond et sont fortement affectés par les propriétés du fond. Les modes intermédiaires sont peu sensibles aux détails du profil de célérité dans la colonne d'eau et à la nature du fond mais restent sensible à la profondeur de la colonne d'eau. Les approches modales décrites dans l'état de l'art se basent sur ces considérations pour améliorer la robustesse [Yang90, Collison00, Yoo99, Tabrikian97, Liu13]. Dans la littérature, les modes intermédiaires sont considérés comme prédictibles et les autres modes comme non-prédictibles [Tabrikian97, Collison00, Liu13].

Hypothèses quant à l'effet de l'incertitude environnementale sur la propagation modale

Nous poussons un peu plus loin la réflexion en introduisant deux hypothèses supplémentaires quant à l'effet de l'incertitude environnementale sur la propagation modale. Le champ acoustique peut être décomposé en groupes de modes proches subissant le même type de propagation (e.g. modes réfractés dans la colonne d'eau qui ont approximativement le même point de retournement, modes réfléchis surface et fond qui ont approximativement la même profondeur de pénétration dans le fond) :

1. Les perturbations de ces différents groupes de modes relativement aux perturbations de l'environnement peuvent être considérées comme décorrélées car chacun des groupes de modes est potentiellement affecté par différentes perturbations de l'environnement.
2. En étudiant la propagation du son dans l'océan, les acousticiens ont remarqué que la propagation des modes pouvait être partiellement caractérisée par un scalaire baptisé *invariant océanique* [Chuprov82, Brekhovskikh03]. L'invariant océanique caractérise la propagation pour un groupe de modes proches subissant le même type de propagation et dépend du groupe de modes considéré [Chuprov82, Rouseff02]. Plus précisément, pour un groupe de modes donné le principe de l'invariant océanique généralisé relie de petites perturbations de paramètres environnementaux à de petites perturbations de fréquence du spectre de la façon suivante [Grachev93, Petnikov02, Turgut07, Kuzkin11, Turgut13, Kinda14] :

$$\frac{df}{f} = \gamma \frac{d\eta}{\eta}, \quad (4.14)$$

où f représente la fréquence, η est un paramètre environnemental arbitraire (hauteur d'eau, hauteur ou épaisseur d'une thermocline, célérité moyenne dans la colonne d'eau, gradient de célérité dans la colonne d'eau, célérité dans le fond...), et γ est la valeur de l'invariant océanique pour le paramètre environnemental η considéré (la valeur de l'invariant océanique a généralement pour ordre de grandeur 1 en valeur absolue). De telles variations du spectre causées par des processus dynamiques à l'intérieur de l'océan (marées, ondes internes, fronts, intrusions de masses d'eau...) ont pu être observés au cours de divers campagnes de mesures acoustiques [Petnikov02, Turgut07, Kuzkin11, Turgut13, Kinda14]. Au sein d'un groupe de modes, les perturbations restent donc corrélées et peuvent éventuellement être approximées par des perturbations de fréquence.

Pour résumer, on peut considérer que la fonction de Green est constituée de différents groupes de modes dont les variations par rapport aux perturbations de l'environnement sont décorréliées alors qu'au sein d'un même groupe de modes les perturbations des différents modes restent corrélés et sont semblables à des variations de fréquences. Bien que ces hypothèses soient approximatives, elles saisissent suffisamment bien les phénomènes de propagation pour notre objectif, à savoir, la localisation robuste de source en environnement océanique incertain. Nous détaillons maintenant comment, à l'aide de ces hypothèses, il est possible de construire une matrice $\Sigma_{\mathbf{g}}$ caractérisant l'incertitude sur la fonction de Green relative à l'incertitude sur l'environnement océanique.

4.2.3.2 Construction de la matrice de covariance

Nous disposons d'un modèle de l'environnement océanique choisi à partir des meilleures connaissances disponibles sur le milieu océanique que nous qualifions d'environnement supposé, et de la fonction de Green correspondante $\mathbf{g}_{\mathbf{a}}$ que nous qualifions de fonction de Green supposée. Le modèle environnemental est potentiellement erroné car la connaissance du milieu océanique est un milieu complexe dont la connaissance est toujours imparfaite, mais nous supposons que la réalité se trouve quelque part aux alentours de ce modèle initial. La fonction de Green n'est plus considérée comme un vecteur déterministe $\mathbf{g}_{\mathbf{a}}$ mais comme un vecteur aléatoire \mathbf{g} dans l'espace vectoriel de dimension N . La densité de probabilité $p(\mathbf{g})$ détermine les régions de l'espace que \mathbf{g} occupe de façon préférentielle. Nous supposons que $p(\mathbf{g})$ est définie par une matrice de covariance $\Sigma_{\mathbf{g}}$ de la forme :

$$\Sigma_{\mathbf{g}} = \mathbf{V} \begin{pmatrix} \sigma_{\mathbf{g}_{\mathbf{a}}}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{C}_{\mathbf{g}} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \mathbf{V}^H, \quad (4.15)$$

avec $\mathbf{V} = [\bar{\mathbf{g}}_{\mathbf{a}}, \mathbf{Q}]$, où $\bar{\mathbf{g}}_{\mathbf{a}}$ est la fonction de Green supposée après normalisation et où \mathbf{Q} est n'importe quelle matrice de taille $N \times N - 1$ formant une base orthonormale dans l'espace orthogonal à $\bar{\mathbf{g}}_{\mathbf{a}}$. La matrice \mathbf{V}^H est une matrice de passage de la base canonique vers une autre base définie par les vecteurs de \mathbf{V} . Ainsi, $\sigma_{\mathbf{g}_{\mathbf{a}}}^2$ représente une énergie dans

la direction de la fonction de Green supposée. Ainsi, $\sigma_{\mathbf{g}_a}^2$ représente une variance dans la direction de la fonction de Green supposée. Le rapport $\sigma_{\mathbf{g}_a}^2 / \text{tr}(\Sigma_{\mathbf{g}})$ caractérise le niveau de variabilité de la fonction de Green du guide d'onde par rapport à la fonction de Green supposée. Plus ce rapport est élevé moins la fonction de Green va s'écarter de la fonction de Green supposée. La matrice $\mathbf{C}_{\mathbf{g}}$ décrit la variabilité de la fonction de Green dans l'espace orthogonal à la fonction de Green supposée. Elle détermine les directions dans lesquelles la fonction de Green repose préférentiellement en dehors de la direction formée par la fonction de Green supposée quand l'environnement réel s'écarter de l'environnement supposé.

Le choix de la valeur affectée à $\sigma_{\mathbf{g}_a}^2$ peut être issu d'observations *in situ* à long terme de la variabilité du champ acoustique causée par les processus dynamiques de l'intérieur de l'océan (marées, ondes internes, fronts, intrusions de masses d'eau...) dans un milieu donné, ou d'un *a priori* sur le degré d'incertitude sur l'environnement. Dans ce dernier cas $\sigma_{\mathbf{g}_a}^2$ peut être obtenu à partir d'une rapide analyse de sensibilité du champ acoustique réalisée en faisant varier de manière aléatoire les paramètres environnementaux [Dosso07a] où la mesure de sensibilité porte sur le rapport $\sigma_{\mathbf{g}_a}^2 / \text{tr}(\Sigma_{\mathbf{g}})$.

Les hypothèses de la section précédente sur l'effet des inadéquations sont utilisées pour construire la matrice $\mathbf{C}_{\mathbf{g}}$ selon le schéma de la figure 4.2. Cette matrice de covariance est approximée à l'aide des covariances des réponses obtenues en faisant varier la fréquence pour différents groupes de modes. Des groupes de modes proches subissant le même type de propagation sont tout d'abord formés (voir la partie 4.3 Application pour un exemple concret). La matrice $\mathbf{C}_{\mathbf{g}}$ est décomposée en une somme de matrices $\mathbf{C}_{\mathbf{g}}^k$, correspondant chacune à un groupe de modes k . Pour chaque groupe, le champ acoustique est simulé sur plusieurs fréquences au voisinage de la fréquence de la source en utilisant le modèle supposé de l'environnement. La matrice de covariance empirique $\mathbf{C}_{\mathbf{g}}^k$ est ensuite construite en utilisant ces données après les avoir projetées sur l'espace orthogonal à la fonction de Green supposée \mathbf{g}_a . Le but est ici d'imiter l'effet des inadéquations sur chacun des groupes de modes en utilisant l'hypothèse formulée dans la section précédente selon laquelle une perturbation des paramètres environnementaux est à peu près équivalente à une perturbation de fréquence. L'éventail des perturbations de fréquence détermine la façon dont les modes varient au sein d'un groupe. Différentes stratégies peuvent être adoptées pour fixer cet intervalle. Il peut être déterminé à partir d'observations *in situ* à long terme des décalages fréquentiels de l'intensité acoustique causés par les processus dynamiques de l'intérieur de l'océan (marées, ondes internes, fronts, intrusions de masses d'eau...) dans un milieu donné [Petnikov02, Turgut07, Kuzkin11, Turgut13, Kinda14] et/ou à l'aide de la valeur de l'invariant océanique de certains paramètres incertains et de leurs variations attendues (avec l'équation (4.14)) [Grachev93, Petnikov02, Turgut13]. Les matrices $\mathbf{C}_{\mathbf{g}}^k$ sont sommées pour construire la matrice $\mathbf{C}_{\mathbf{g}}$, les perturbations de fréquences sont donc réalisées indépendamment pour chacun des groupes. Cela permet de décorréler les variations de ces groupes et donc de mettre en application l'hypothèse formulée dans la section précédente selon laquelle les perturbations des différents groupes de modes relativement aux perturbations de l'environnement peuvent être considérées comme décorrélées. Cette hypothèse de décorrélation semble être la plus importante et est obtenue quoi qu'il en soit en perturbant la fréquence car cette opération rend la phase de ces groupes aléatoire.

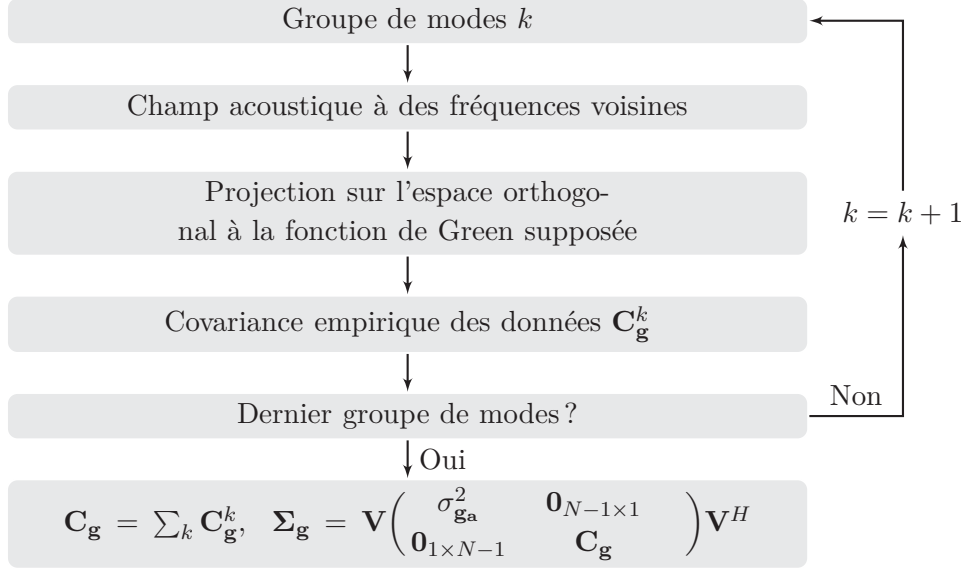


FIGURE 4.2 – Schéma descriptif de la construction de la matrice \mathbf{C}_g . Pour chaque groupe de modes le champ acoustique est simulé sur plusieurs fréquences au voisinage de la fréquence de la source et retranché du champ acoustique à la fréquence de la source. Le résultat est ensuite projeté sur l'espace orthogonal à la fonction de Green supposée. Le calcul de la covariance empirique de ces données dans la base définie par \mathbf{Q} donne la matrice \mathbf{C}_g^k . La matrice \mathbf{C}_g est la somme des matrices \mathbf{C}_g^k .

4.3 Application

Dans cette section, la capacité de notre méthode bayésienne de localisation à donner des DPP fiables est illustrée à travers quelques simulations. La robustesse de la méthode est évaluée à l'aide d'une analyse de performance par simulations de Monte-Carlo et comparée à l'approche de Liu *et. al* [Liu13] ainsi qu'au MFP basique.

4.3.1 Scénarios

Les scénarios de simulation sont illustrés sur la figure 4.3. Deux environnements sont considérés. Dans les deux cas la célérité dans la colonne d'eau est fixée par les célérités c_1 (à la surface), c_2 (à 10 m de profondeur), c_3 (à 50 m de profondeur) et c_4 (au niveau du fond à la profondeur D). Dans le premier environnement, le fond est constitué d'un socle semi-infini alors que dans le second environnement le fond est constitué d'une couche de sédiment superposée à un socle semi-infini. Les deux environnements sont considérés comme incertains. Les densités de probabilité des paramètres sont uniformes avec les limites données dans la Table 4.1. Dans tous les cas, l'environnement supposé pour réaliser la localisation est le premier environnement avec tous les paramètres choisis à leur valeur moyenne.

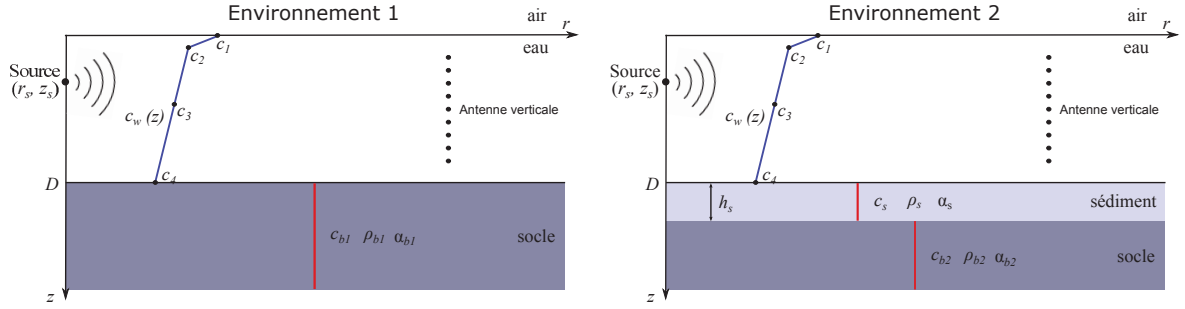


FIGURE 4.3 – Représentation schématique des environnements océaniques pour la localisation de source.

Paramètres	Limites					
	Environnement 1	Environnement 2	Environnement supposé	Cas test 1	Cas test 2	Cas test 3
r_s (km)	[0.5, 10]	[0.5, 10]	—	3.0	1.5	7.5
z_s (km)	[2, 95]	[2, 95]	—	88	80	29
c_1 (m/s)	[1515, 1525]	[1515, 1525]	1520	1523.1	1518.7	1517.0
c_2 (m/s)	[1514, 1522]	[1514, 1522]	1518	1516.9	1521.6	1521.7
c_3 (m/s)	[1510, 1516]	[1510, 1516]	1513	1515.1	1511.6	1513.4
c_4 (m/s)	[1508, 1512]	[1508, 1512]	1510	1510.0	1509.3	1508.0
D (m)	[98, 102]	[98, 102]	100	98.2	101.5	100.2
c_{b1} (m/s)	[1550, 1750]	—	1650	1691.1	1663.8	1701.0
ρ_{b1} (g/cm ³)	[1.2, 2.2]	—	1.7	2.03	2.16	1.62
α_{b1} (dB/λ)	[0.05, 0.5]	—	0.275	0.327	0.371	0.096
h_s (m)	—	[5, 20]	—	—	—	—
c_s (m/s)	—	[1550, 1650]	—	—	—	—
ρ_s (g/cm ³)	—	[1, 2]	—	—	—	—
α_s (dB/λ)	—	[0.05, 0.5]	—	—	—	—
c_{b2} (m/s)	—	[1650, 1750]	—	—	—	—
ρ_{b2} (g/cm ³)	—	[1.2, 2.2]	—	—	—	—
α_{b2} (dB/λ)	—	[0.05, 0.5]	—	—	—	—

TABLE 4.1 – Valeurs limites des paramètres environnementaux pour les deux environnements considérés, environnement supposé pour réaliser l'inversion, environnements réels pour les trois cas tests.

Le problème inverse par MFP implique la localisation d'une source acoustique en distance et en profondeur. La distance est inconnue avec un *a priori* uniforme sur l'intervalle $r_s = [500, 10000]$ m et la profondeur est inconnue avec un *a priori* uniforme sur l'intervalle $z_s = [2, 95]$ m (la profondeur d'eau du guide d'onde supposé est $D = 100$ m). L'antenne réceptrice est une antenne verticale constituée de $N = 15$ éléments échantillonnant la colonne d'eau sur une grille régulièrement espacée entre $z = 2$ m et $z = 86$ m. L'évaluation de la DPP est réalisée sur une grille avec des incréments de 2 m en profondeur et 50 m en distance. On considère la fonction de vraisemblance avec variance du bruit inconnue de l'équation (4.3). Seule la fréquence $f = 300$ Hz est utilisée pour réaliser l'inversion. A cette fréquence, le champ acoustique dans le guide d'onde supposé est constitué de 16 modes propagatifs. Les fonctions modales sont représentées sur la figure 4.4. On considère $L = 10$ observations. Le RSB est le même pour toutes les observations et défini par $\text{RSB} = \frac{|s_l(f_m)|^2 \|\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v)\|^2}{N \sigma_w^2(f_m)}$.

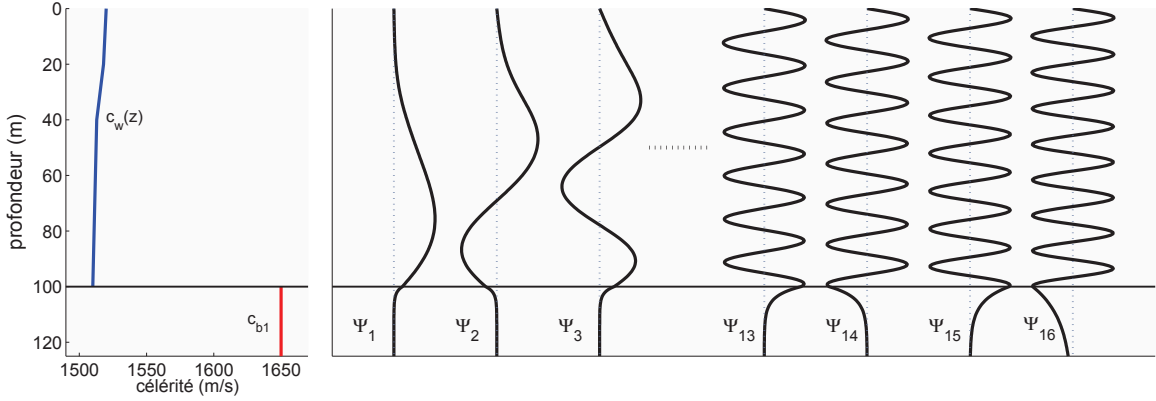


FIGURE 4.4 – Fonctions modales du guide d'onde supposé.

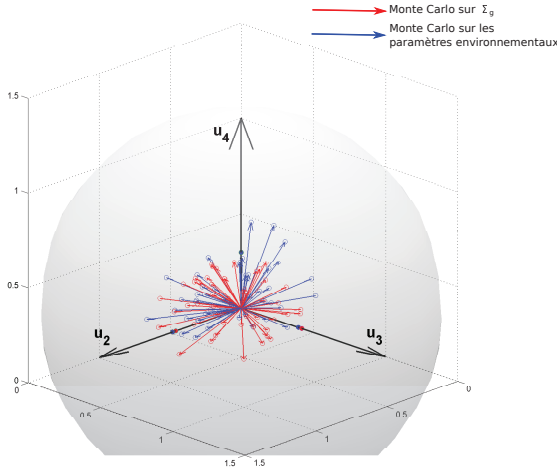
Des groupes de modes sont constitués afin de construire la matrice \mathbf{C}_g . En considérant que les groupes de modes doivent être affectés par différentes caractéristiques du guide d'onde, six groupes sont formés : le groupe 1 est simplement constitué du mode $n = 1$, le groupe 2 est simplement constitué du mode $n = 2$, le groupe 3 est constitué des modes $n = \{3 \cdots 7\}$, le groupe 4 est constitué des modes $n = \{8 \cdots 12\}$, le groupe 5 est constitué des modes $n = \{13, 14\}$ et le groupe 6 est constitué des modes restants $n = \{15 \cdots M\}$. Les modes $n = \{1, 2\}$ sont tous deux piégés dans la colonne d'eau, nous les considérons toutefois comme décorrélés car le mode 2 est réfracté bien plus en surface que le mode 1 dans la colonne d'eau (voir la figure. 4.4). Les modes $n = \{13 \cdots N_{mode}\}$ pénètrent significativement dans le fond, deux groupes sont constitués car les modes d'ordres $n = \{15 \cdots N_{mode}\}$ pénètrent bien plus profondément dans le fond (voir figure. 4.4). Il faut noter que les résultats ne sont pas très sensibles à de petits changements dans la division des modes en différents groupes, cette division peut donc être légèrement arbitraire. Seule la séparation des modes $n = 1$ et $n = 2$ en deux groupes distincts semble vraiment importante.

Onze fréquences voisines dans l'intervalle $\pm 5\% \times f$ sont considérées pour construire la matrice \mathbf{C}_g . Il faut noter que des éventails de perturbations compris entre $\pm 10\% \times f$ ou $\pm 1\% \times f$ ont également donné de bons résultats. Ces intervalles correspondent grossièrement aux perturbations de fréquence prédites par la théorie de l'invariant océanique profondeur/fréquence pour l'incertitude sur la profondeur considérée (l'invariant océanique profondeur/fréquence est $\gamma = -2$, ainsi des variations de profondeur de $\pm 2\%$ correspondent grossièrement à des variations de fréquence de $\pm 4\%$ [Grachev93]).

La quantité σ_{ga}^2 est déterminée à partir d'une analyse de sensibilité du champ acoustique choisie telle que présentée dans la section précédente avec 50 réalisations aléatoires de l'environnement 1. Elle est choisie tel que $\frac{\sigma_{ga}^2}{\text{tr}(\Sigma_g)} = 0.25$, c'est à dire de façon à ce que 25 % de l'énergie repose dans la direction de la fonction de Green supposée. Des rapports $\frac{\sigma_{ga}^2}{\text{tr}(\Sigma_g)}$ compris entre 0.15 et 0.75 donnent des DDP assez similaires la plupart du temps (même position du maximum et incertitude similaire).

La figure 4.5 présente deux exemples de projection en 3 dimensions de fonctions de Green obtenues à partir de la matrice de covariance Σ_g (en rouge) et à partir de réalisations aléatoires de l'environnement 1 (en bleu). On observe une grande similarité entre les deux jeux de fonction de Green sur ces projections ce qui permet d'apprécier la bonne faculté du modèle Σ_g à modéliser l'incertitude sur la fonction de Green lorsque l'environnement océanique est incertain.

(a) Projection sur les composantes 2, 3 et 4



(b) Projection sur les composantes 2, 3 et 10

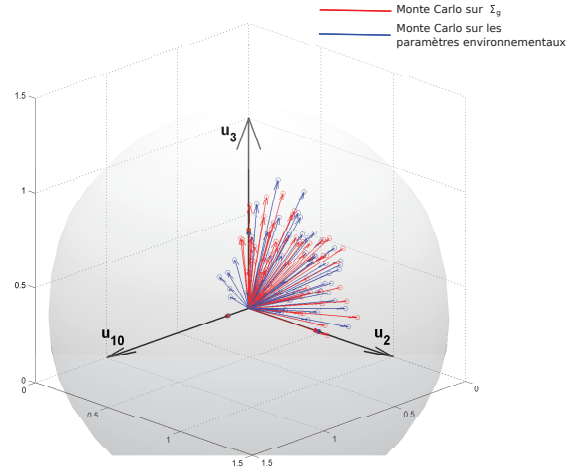


FIGURE 4.5 – Projection de fonctions de Green obtenues à partir de la matrice de covariance Σ_g (en rouge) et à partir de réalisations aléatoires de l'environnement 1 (en bleu) sur 3 vecteurs propres de Σ_g : (a) projection sur les vecteurs propres u_2 , u_3 et u_4 , (b) projection sur les vecteurs propres u_2 , u_3 et u_{10} .

4.3.2 Illustrations

La capacité de la méthode proposée à donner des DPP fiables est illustrée à travers trois exemples choisis représentant des résultats typiques parmi un grand nombre de cas testés. Dans chaque cas, le guide d'onde réel utilisé pour générer les données observées est différent du guide d'onde supposé pour réaliser l'inversion. L'environnement réel pour les trois cas tests a été choisi aléatoirement comme décrit dans la Table 4.1 pour l'environnement 1. Les valeurs des paramètres pour chacun de ces trois environnements sont données dans la Table 4.1. Le RSB est de 3 dB. La DPP est évaluée à l'aide de la méthode proposée (MFP avec marginalisation de la fonction de Green) et comparée à la DPP obtenue lorsque qu'aucune technique de gestion des inadéquations n'est mise en place (MFP basique). Les résultats sont donnés sur la figure 4.6. Dans le premier cas test les deux méthodes donnent une position de source correcte. Dans le deuxième cas test seule la méthode de marginalisation de la fonction de Green donne une position correcte. A cause des inadéquations, le MFP basique se trompe alors que la méthode proposée, plus robuste, relocalise la source. Dans le troisième cas test aucune des deux méthodes n'est capable de donner une position correcte.

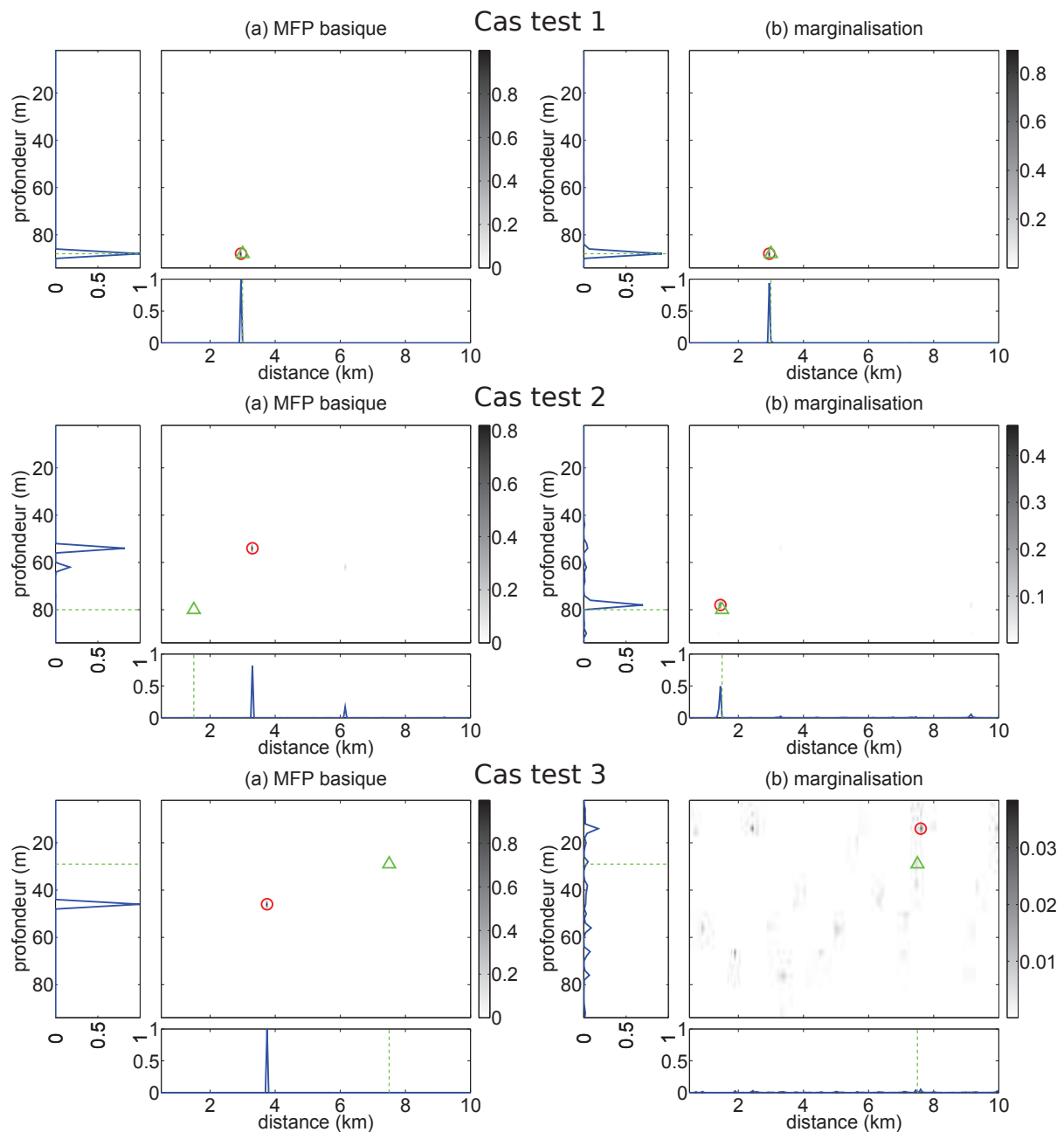


FIGURE 4.6 – DPP conjointes de la distance et de la profondeur de la source, et densités marginales 1D, pour les trois cas tests : (a) MFP basique, (b) MFP avec marginalisation de la fonction de Green. Le cercle rouge indique l'estimée du MAP, le triangle vert et les lignes traitillées indiquent la vraie position de la source.

Les dynamiques des DPPs sur la figures 4.6 sont ajustées au contenu. Ainsi, le maximum de la colorbar donne la probabilité maximum de la DPP. Seule la méthode de marginalisation de la fonction de Green est en mesure de donner des DPPs fiables dans chacun des cas. Cette méthode ne suggère jamais avec certitude (c'est à dire avec une probabilité proche de 1) une mauvaise position de la source contrairement au MFP basique, et elle ne se contente pas de rajouter de l'incertitude. Dans le premier cas test la bonne position de la source est suggérée avec une probabilité de 0.89. Dans le deuxième cas test la bonne position est également suggérée avec une bonne probabilité, bien qu'inférieure à la probabilité précédente. Cela n'est pas surprenant : si le MFP basique ne fonctionne pas, la localisation comporte probablement plus d'incertitude. Dans le troisième cas test une mauvaise position est suggérée, mais avec une probabilité très faible, il est donc clair que le résultat de la localisation est très incertain.

4.3.3 Evaluation des performances par simulations de Monte-Carlo

Une analyse de performances par méthode de Monte-Carlo est réalisée afin d'évaluer la robustesse de la méthode proposée vis-à-vis des erreurs sur le modèle environnemental et du bruit. Les performances sont évaluées en terme de probabilité de bonne localisation (PBL) de l'estimateur du MAP et de racine de l'erreur quadratique moyenne (REQM) de l'estimateur de la moyenne *a posteriori* (cf chapitre 2). La PBL est définie comme la probabilité que l'erreur absolue de localisation soit inférieure ou égale à 500 m en distance et 5 m en profondeur. Pour chaque RSB, $N_{mc} = 5000$ réalisations aléatoires de l'environnement océanique, de la position de la source et du bruit sont générées. L'écart-type sur l'estimée de la PBL est donnée par [Tabrikian97, Dosso11b, Dosso12]

$$\sigma = \sqrt{\frac{\text{PBL}(1 - \text{PBL})}{N_{mc}}}. \quad (4.16)$$

Pour $N_{mc} = 5000$, cette erreur d'estimation est très faible, sa valeur est maximale en $\text{PBL} = 0.5$ et vaut 0.0071. Cette erreur est comprise dans l'épaisseur du trait de nos courbes de PBL. Les résultats sont présentés sur la figure 4.7. Deux cas sont considérés : dans le premier cas le guide d'onde océanique réel est généré aléatoirement sur le modèle de l'environnement 1, et dans le deuxième cas le guide d'onde océanique réel est généré aléatoirement sur le modèle de l'environnement 2 (voir la figure. 4.3 et la table 4.1). Le guide d'onde supposé pour réaliser l'inversion est toujours l'environnement 1 où tous les paramètres environnementaux sont pris à leur valeur moyenne (voir la table 4.1); ainsi l'utilisation de l'environnement 2 pour générer les observations permet d'étudier la robustesse de la localisation par rapport à une erreur sur la structure du guide d'onde. Les performances du MFP avec marginalisation de la fonction de Green sont comparées au MFP basique et à l'approche modale de Liu *et al.* [Liu13] où les modes non prédictibles sont considérés comme du bruit (nous prenons le modes $m = \{3 \cdots 12\}$ comme modes prédictibles, c'est le découpage qui a donné les meilleurs résultats à la méthode de Liu *et al.* parmi toutes les autres possibilités).

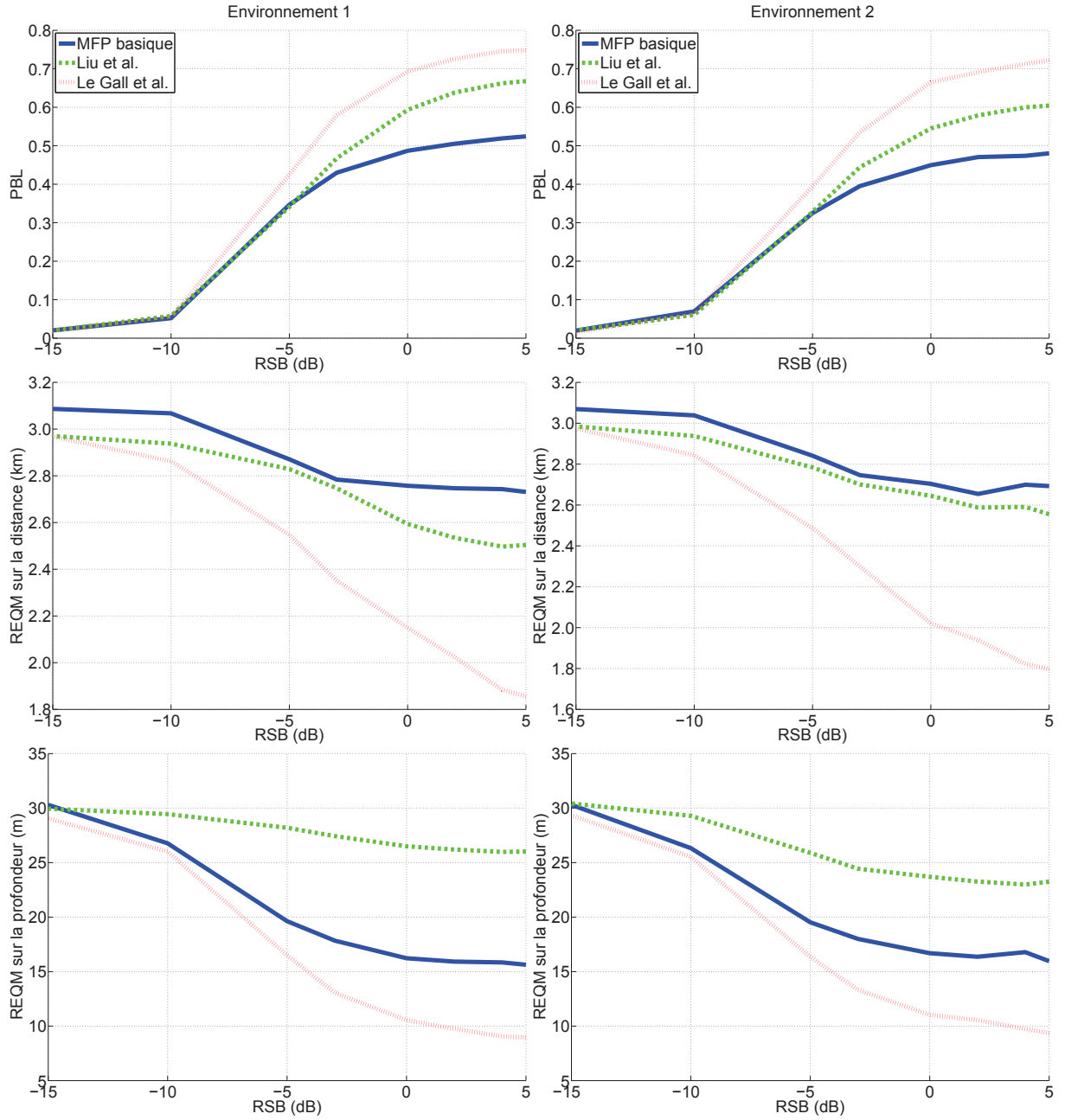


FIGURE 4.7 – Analyse des performances de la localisation pour les deux cas considérés (à gauche : environnement 1, à droite : environnement 2) à l’aide de simulations de Monte-Carlo (5000 itérations). Le panneau supérieur présente les résultats en terme de PBL pour l’estimateur du MAP. Les deux autres panneaux présentent les résultats en terme de REQM de l’estimateur de la moyenne *a posteriori*. Les résultats obtenus avec la méthode proposée ici sont représentés en lignes pointillées rouges et comparé au MFP basique (lignes continues bleues), et à la méthode modale de Liu et al. [Liu13] (lignes traitillées vertes).

La figure 4.7 montre que la méthode proposée surpasse les autres méthodes et fournit une amélioration importante de la PBL et de la REQM. Il faut noter que si l'approche modale de Liu et al. [Liu13] fournit une amélioration significative de la PBL comparée au MFP basique, les résultats ne sont pas aussi convaincants lorsqu'on regarde la REQM. La REQM sur la distance est légèrement améliorée, mais la REQM sur la profondeur est dégradée. Cela montre que lorsque cette méthode ne parvient pas à localiser la source correctement, l'erreur sur la profondeur est plus importante que lorsque le MFP basique échoue. Si cette méthode est moins robuste aux erreurs sur le modèle environnemental pour la discrimination en profondeur, c'est probablement à cause de l'information perdue en rejetant les modes d'ordre faible. La méthode proposée est robuste que se soit en terme de PBL et REQM.

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une nouvelle approche bayésienne pour la localisation de source. La méthode gère l'incertitude sur le milieu de propagation océanique en considérant la fonction de Green comme une variable aléatoire dont la densité de probabilité représente l'incertitude sur l'environnement. L'intégration de la DPP par rapport à la densité de probabilité de la fonction de Green permet d'obtenir la DPP des paramètres de localisation. L'intégration par force brute ayant un cout de calcul prohibitif, l'intégrale est réduite à une intégrale mono-dimensionnelle ce qui accélère considérablement l'intégration et rend l'ensemble du processus de localisation efficace en temps de calcul. Quelques hypothèses sur la propagation modale ont été introduites pour construire une densité de probabilité de fonction de Green prenant en compte les incertitudes de l'environnement. La décorrélation de différents groupes de modes relativement aux erreurs de modélisation de l'environnement et la similarité pour chaque groupe de modes entre l'effet des erreurs de modélisation et les décalages fréquentiels du champ acoustique sont notamment considérés. Quelques illustrations montrent que la méthode fournit des DPP fiables et des simulations de Monte-Carlo attestent de la robustesse aux erreurs sur le modèle environnemental. L'approche proposée est prometteuse dans les applications où l'on dispose d'une antenne réceptrice fixe. Des observations acoustiques *in situ* à long terme peuvent alors être menées pour caractériser l'incertitude sur la fonction de Green causée par les processus dynamiques de l'océan (marées, ondes internes, fronts, intrusions de masses d'eau...) dans cet environnement [Petnikov02, Kuzkin11, Turgut13, Kinda14], sans faire d'hypothèses sur l'incertitude environnementale sous-jacente.

Chapitre 5

Analyse des performances de la localisation de source sur un unique capteur par Matched-mode processing

Sommaire

5.1	Contexte mono-capteur	102
5.1.1	Source courte en temps et dispersion modale	102
5.1.2	Séparation des modes	103
5.1.3	Matched-mode processing	105
5.2	Analyse de performances	105
5.2.1	Scénarios	106
5.2.2	Analyse du problème	107
5.2.3	Validation du MEI en un point	109
5.2.4	Performances sans inadéquations	109
5.2.5	Performances en présence d'erreurs sur le modèle environne- mental	113
5.2.5.1	Inversion avec l'environnement B	113
5.2.5.2	Inversion avec l'environnement C	115
5.3	Conclusion	117

L'échantillonnage du champ acoustique à l'aide de plusieurs capteurs donne la diversité spatiale souvent nécessaire aux méthodes du MFP. Si le signal source le permet, on peut cependant se passer de cette diversité spatiale et utiliser un seul capteur pour réaliser l'inversion. Dans le cas où le signal source est de type impulsionnel ou court en temps, on peut extraire les modes du guide d'onde et exploiter ces modes pour estimer les paramètres d'intérêt. Certaines méthodes d'inversion mono-capteur exploitent uniquement les propriétés de dispersion temps-fréquence des modes [Potty00, Rajan10, Bonnell13a, Bonnell14b]. Ces méthodes permettent d'estimer la distance source/récepteur et certaines propriétés géoacoustiques du fond. Cependant, elles n'exploitent que la phase des modes et sont donc incapables d'estimer la profondeur de la source et l'atténuation dans le fond. La profondeur de la source et l'atténuation peuvent être estimées en étudiant l'amplitude des modes [Wan10, Zeng13]. Le matched-mode processing (MMP) exploite toute l'information contenue dans les modes en comparant les modes observés à des modes simulés pour estimer les paramètres d'intérêts à la manière du MFP [Chen92, Chen02, Le Touzé07, Le Touzé08, Le Touzé09, Nicolas09, Bonnell14a]. Le MMP peut donc être vu comme une variante du MFP. Certaines baleines émettant des modulations de fréquence ou des impulsions très basses fréquences (<250 Hz) peuvent notamment être localisées avec ce type d'approche [Bonnell14b, Bonnell14a], et les signaux en provenance d'airguns ou d'implosion d'ampoules peuvent par exemple être exploités pour réaliser l'inversion géoacoustique [Bonnell13a]. Ce chapitre constitue une ouverture vers ce contexte mono-capteur.

Les performances MMP ont été très peu étudiées par le passé. Ce chapitre est consacré à l'analyse des performances de la localisation de source par MMP à l'aide des outils développés au chapitre 3. Les performances sont analysées dans différentes configurations en présence et en l'absence d'erreurs de modélisation de l'environnement. Nous présentons dans un premier temps le MMP mono-capteur, puis les résultats de prédiction de performances sont présentés et analysés.

5.1 Contexte mono-capteur

5.1.1 Source courte en temps et dispersion modale

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, en milieu petit fond et aux basses fréquences, la propagation acoustique est bien décrite par la théorie des modes. Soit une source émettant un signal large bande de spectre $s(f)$ à la profondeur z_s , le champ de pression $p(r_s, z_s, f)$ reçu à la profondeur z_r après propagation sur une distance r_s dans un guide d'onde océanique range-independent est donné par (voir chapitre 1) :

$$p(r_s, z_s, f) = s(f) \sum_{n=1}^{N_{prop}} x_n(f). \quad (5.1)$$

où la quantité $x_n(f)$ est la contribution du mode n

$$x_n(f) = Q\Psi_n(f, z_s)\Psi_n(f, z_r)\frac{\exp(jk_{rn}(f)r_s)}{\sqrt{k_{rn}(f)r_s}}. \quad (5.2)$$

Les modes $x_n(f)$ dépendent des paramètres de localisation et des paramètres environnementaux du guide d'onde océanique.

La propagation des modes est dispersive. A une fréquence donnée, différents modes ne se propagent pas à la même vitesse horizontale dans le guide d'onde, et pour un mode donné la vitesse de propagation dépend de la fréquence. Chaque mode se propage avec une vitesse de groupe $v_{gn}(f) = 2\pi\frac{df}{dk_{rn}}$ qui dépend de la fréquence. Lorsque la source est courte en temps¹, cela signifie que les différentes composantes fréquentielles des différents modes vont arriver après un temps de propagation $t_n(f) = t_s(f) + \frac{r_s}{v_{gn}(f)}$ où $t_s(f)$ est la loi de la source et r_s est la distance de propagation. La dispersion modale est illustrée sur la figure 5.1.

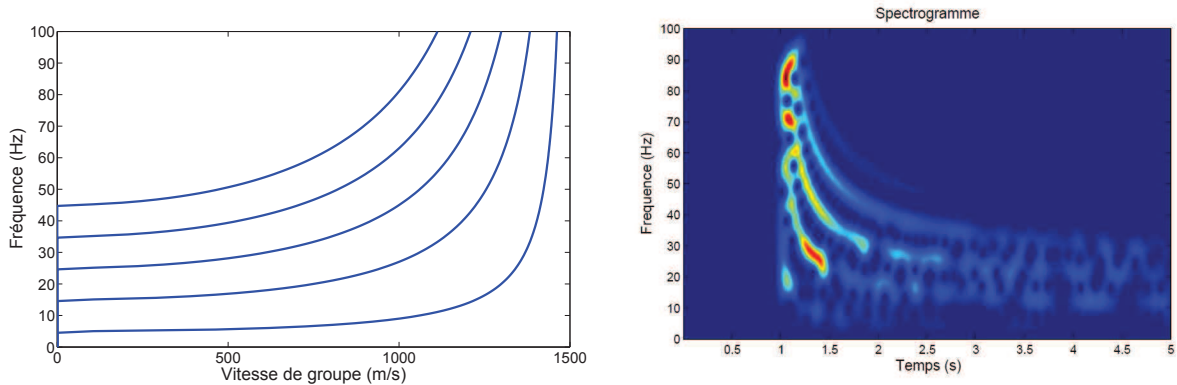


FIGURE 5.1 – Vitesses de groupe des cinq premiers modes et spectrogramme d'un signal reçu dans un guide idéal pour une source impulsionnelle [Bonnell10]. Chaque mode se propage à une vitesse $v_{gn}(f)$ et arrive avec un temps de propagation $t_n(f)$ qui lui est propre.

5.1.2 Séparation des modes

Le MMP nécessite de filtrer les modes à partir du signal reçu. Dans les rares cas où les modes sont déjà bien séparés sur le spectrogramme, le filtrage peut être réalisé en appliquant simplement des masques à ce plan temps-fréquence. La plupart du temps la distance de propagation n'est pas suffisante et les modes ne sont pas suffisamment séparés dans ce plan temps-fréquence. On a alors recours à un opérateur dit de *warping* [Baraniuk95] afin de représenter le signal dans un espace où les modes sont bien séparés.

1. des sources de types impulsionnelles ou des modulations de fréquence

Un opérateur de warping transforme un signal $z(t)$ en un nouveau signal warpé $\mathbf{W}_h z(t)$ en utilisant une fonction de warping $h(t)$:

$$\mathbf{W}_h z(t) = \sqrt{|h'(t)|} z[h(t)]. \quad (5.3)$$

Notons que le warping est une transformation inversible, et que la fonction de warping inverse est $h^{-1}(t)$.

Des opérateurs de warping adaptés à la dispersion modale en milieu petit fond ont été développés [Le Touzé09, Bonnel12, Bonnel13b]. L'opérateur de warping associé à la fonction de warping suivante est très populaire [Le Touzé09, Bonnel11, Hai-Qiang13, Zhou14, Ballard14, Petrov14]

$$h(t) = \sqrt{t^2 + t_r^2}, \quad (5.4)$$

avec $t_r = r_s/c_w$ où c_w est la valeur moyenne de la célérité dans la colonne d'eau. Cet opérateur est parfaitement adapté à la dispersion au sein d'un guide idéal (célérité constante dans l'eau et fond parfaitement rigide). Il y transforme chaque mode en une fréquence pure de fréquence $f_{cn} = \frac{2n-1}{4D}$ où D est la profondeur du guide, ce qui permet de séparer aisément les modes à l'aide de la méthodologie suivante :

1. warping du signal reçu à l'aide de la fonction $h(t)$,
2. filtrage du mode n à l'aide d'un masque fréquentiel
3. warping inverse du mode n à l'aide de la fonction $h^{-1}(t)$.

Cette méthodologie est illustrée sur la figure 5.2. Cette méthode de filtrage s'est révélée être une technique robuste pouvant être utilisée dans la plupart des applications très basses fréquences (< 250 Hz) en environnement océanique petit fond (même dans des environnements très différents du guide idéal), sans nécessiter de connaissance particulière sur l'environnement ou de connaître la distance de propagation (t_r peut être déterminé de manière empirique à l'aide des données sans connaître r_s ou c_w) [Bonnel11, Bonnel13a]. Cette technique suppose que la source est impulsionnelle. Moyennant quelques adaptations, elle peut également être utilisée pour des sources courtes en temps comme des modulations de fréquence (strictement croissantes ou décroissantes) sans connaître exactement la loi de la source [Bonnel14b].

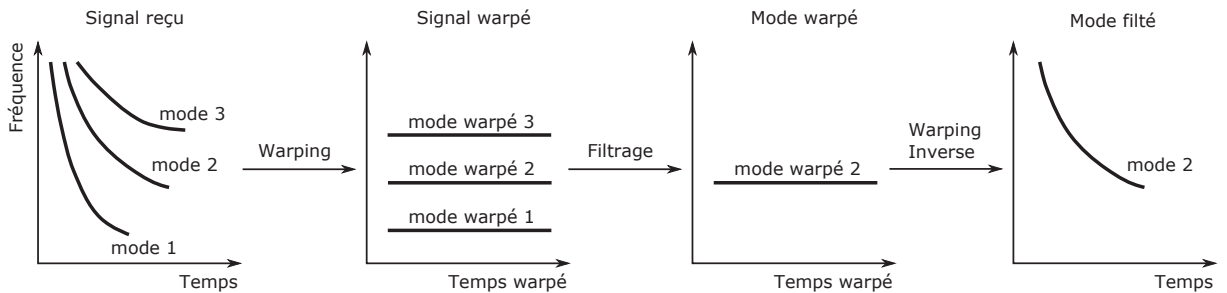


FIGURE 5.2 – Processus de filtrage des modes [Bonnel10].

Dans la suite, pour l'analyse des performances du MMP, nous supposons que les modes sont parfaitement filtrés. Il est cependant possible d'étudier l'influence d'éventuelles dégradations résultant du filtrage en les traitants comme des inadéquations au même titre que les inadéquations imposées par une méconnaissance de l'environnement.

5.1.3 Matched-mode processing

Comme pour le MFP, le but du MMP est d'estimer le jeu de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ qui peut contenir les paramètres de localisation et/ou les paramètres environnementaux. Une fois les modes propagatifs isolés, le signal analysé peut être modélisé par le vecteur de taille $N_{modes} \times 1$ suivant

$$\mathbf{z}(f_m) = s(f_m) \cdot \mathbf{x}(f_m, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{w}(f_m), \quad m = 1, \dots, M \quad (5.5)$$

pour chacune des M fréquences f_m . L'entier N_{modes} est le nombre de modes sélectionnés. Chaque élément du vecteur $\mathbf{z}(f_m)$ représente un mode isolé à partir du signal reçu. Le scalaire $s(f_m)$ représente le signal source. Chaque élément du vecteur $\mathbf{x}(f_m, \boldsymbol{\theta})$ de taille $N_{modes} \times 1$ représente un mode : le n ième élément de $\mathbf{x}(f_m, \boldsymbol{\theta})$ vaut $x_n(f)$ (cf équation (5.2)). Le vecteur $\mathbf{w}(f_m)$ est un bruit additif supposé gaussien à moyenne nulle, circulaire-symétrique, blanc en fréquence et indépendant du signal source. Ce bruit est également supposé blanc entre les différents modes, ou de matrice de covariance connue auquel cas il est possible de se ramener au cas blanc. Ce modèle de bruit gaussien se justifie en vertu du théorème central limite. Pour être parfaitement rigoureux il faudrait néanmoins vérifier si le bruit ne perd pas cette propriété après le filtrage modal, mais ceci est d'une autre ampleur théorique.

Le MMP mono-capteur s'applique à des sources courtes en temps. Le signal source présente donc un caractère déterministe et le modèle de signal source déterministe présenté au chapitre 2 est bien approprié. La séquence $s(f_m)$ est souvent peu connue, en particulier dans les applications de l'acoustique passive. Il est alors préférable de considérer cette séquence comme inconnue. Dans le cas où aucune information n'est disponible sur la séquence $s(f_m)$ et où la variance du bruit $\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)$ est connue, un estimateur du MV du MMP peut être obtenue en faisant l'analogie avec l'estimateur du MV du MFP :

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\theta}} C^{MMP}(\boldsymbol{\theta}), \quad \text{avec } C^{MMP}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{m=1}^M \frac{|\bar{\mathbf{x}}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{z}(f_m)|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)}, \quad (5.6)$$

où $\bar{\mathbf{x}}(f_k, \boldsymbol{\theta})$ est une version normalisée de $\mathbf{x}(f_k, \boldsymbol{\theta})$ telle que $\bar{\mathbf{x}}(f_k, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{x}(f_k, \boldsymbol{\theta})}{\|\mathbf{x}(f_k, \boldsymbol{\theta})\|}$. Cet estimateur compare les modes observés aux modes simulés, d'où l'appellation matched-mode processing (MMP).

Cet estimateur est analogue à l'estimateur de MVD incohérent du MFP, les outils d'analyse de performances mis au point pour le MFP peuvent donc être transposés au MMP. Dans la suite, nous utilisons les résultats développés au chapitre 3 pour analyser les performances du MMP à l'aide du MEI.

5.2 Analyse de performances

Dans cette section, les performances de la localisation de source par MMP sont analysées dans un cadre applicatif classique à l'aide du MEI. Les performances sont d'abord

étudiées en l'absence d'inadéquations pour différentes positions de la source et du récepteur, puis l'influence d'inadéquations entre l'environnement réel et l'environnement supposé est examinée.

5.2.1 Scénarios

Les scénarios de simulations sont illustrés sur la figure 5.3. On se place dans une configuration typique du MMP mono-capteur. L'environnement réel est constitué d'une couche d'eau de hauteur $D = 79$ m. Le profil de célérité comporte une thermocline et le fond est composé de deux couches de sédiments sur un socle semi-infini. Les propriétés géoacoustiques du fond sont données sur la figure 5.3 et le profil de célérité est donné dans le tableau 5.1. On considère $M = 50$ fréquences régulièrement espacées dans la bande fréquentielle $\Delta f = [25, 150]$ Hz et les quatre premiers modes propagatifs dans cette bande. Le RSB est défini par $\text{RSB}(f_m) = \frac{|s(f_m)|^2 \|\mathbf{x}(f_m, \theta_0)\|^2}{\sigma_w^2(f_m)}$ (c'est le RSB au niveau du récepteur), et pris constant sur toutes les fréquences. On considère un intervalle de recherche $r_s = [500, 10000]$ m et $z_s = [5, 75]$ m pour la position de la source.

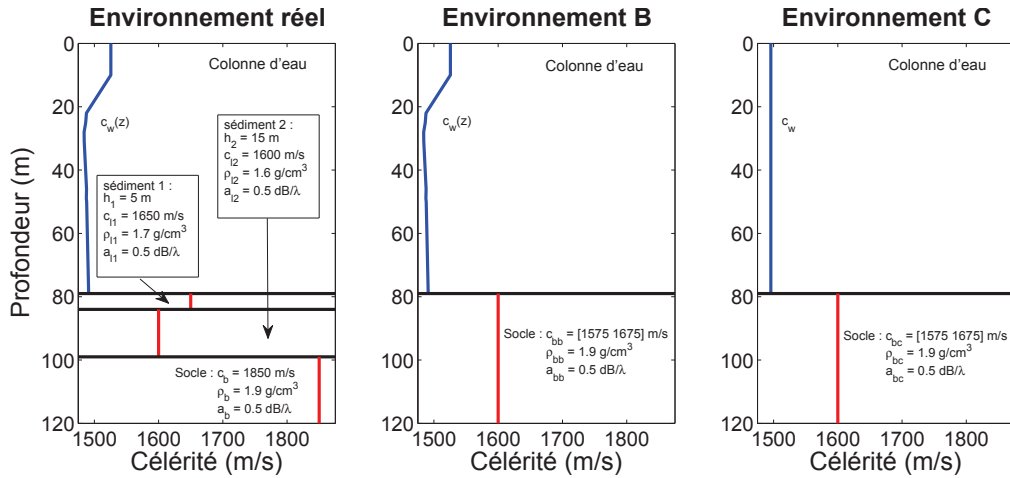


FIGURE 5.3 – Environnement réel et environnements considérés pour la localisation en présence d'inadéquations.

Le milieu de propagation réel est souvent mal connu dans la pratique. La structure détaillée du fond et ses propriétés sont hors d'atteintes si des campagnes d'inversion géoacoustiques n'ont pas été menées précédemment. Le profil de célérité dans la colonne d'eau est plus facile à évaluer (à l'aide d'une chaîne de capteurs de conductivité/température/profondeur par exemple), mais ces mesures ne sont pas toujours disponibles et il faut dans ce cas travailler à l'aveugle. La localisation est alors réalisée à l'aide d'un environnement différent de l'environnement réel. Le problème inverse de localisation souffre de ces inadéquations entre l'environnement réel et l'environnement supposé pour l'inversion. Pour évaluer l'impact de ce type d'inadéquations nous introduisons deux environnements : l'environnement B et l'environnement C tous deux présentés sur la figure 5.3. L'environnement B est représentatif d'une méconnaissance importante des propriétés

du fond. Le profil de célérité est le même que celui de l'environnement réel mais le fond est simplement composé d'un socle dans lequel la célérité c_b est constante. Plusieurs valeurs de célérité du fond comprises entre $c_{bb} = 1575$ m/s et $c_{bb} = 1675$ m/s seront testées. L'environnement C est représentatif d'une méconnaissance importante à la fois de la célérité dans l'eau et du fond. Le profil de célérité est malencontreusement supposé constant à $c_w = 1494.9$ m/s et le fond est identique à l'environnement B. Plusieurs valeurs de célérité du fond comprises entre $c_{bc} = 1575$ m/s et $c_{bc} = 1675$ m/s seront également testées.

Profondeur z (m)	0	10	22	25	28	31	46	49	50	D
Célérité $c_w(z)$ (m/s)	1525.7	1525.7	1487.8	1486.6	1484.1	1484.3	1487.9	1487.5	1488.0	1491.2

TABLE 5.1 – Profil de célérité dans la colonne d'eau pour l'environnement réel et l'environnement B. Le profil est interpolé linéairement entre les profondeurs.

5.2.2 Analyse du problème

La figure 5.4 présente des exemples de fonctions d'ambiguïtés du MMP en l'absence d'inadéquations. Comme on peut le voir sur ces exemples le problème d'estimation est un problème multimodal et se prête donc bien à une étude des performances par MEI.

L'expression d'un mode, donnée dans l'équation (5.2), permet d'appréhender le problème de localisation par MMP. Bien que l'estimation de la distance et de la profondeur par MMP soit un problème couplé, il convient de noter que l'information sur la profondeur de la source est portée par les fonction modales $\Psi_n(f, z_s)$ alors que l'information sur la distance est principalement portée par les termes de phase $\exp(jk_{rn}(f)r_s)$. La figure 5.5 présente les fonctions modales à 100 Hz des quatre modes filtrés dans le but de réaliser la localisation par MMP. Quelques remarques :

- les fonctions modales convergent vers un noeud (point où la fonction modale s'annule) commun à la surface,
- les fonctions modales présentent une certaine symétrie par rapport au centre de la colonne d'eau (ou antisymétrie selon la parité des modes) légèrement contrariée par la pénétration dans le fond,
- les amplitudes des fonctions modales des modes $n = 2$ et $n = 4$ s'annulent toutes deux autour de la profondeur $z = 45$ m,
- les quatre modes pénètrent significativement dans les deux couches de sédiments mais assez peu dans le socle.

Ce type d'observations nous permettra de mieux comprendre certains des résultats obtenus par la suite. La symétrie des fonctions modales par exemple explique d'ores et déjà l'allure des fonctions d'ambiguïté dans la figure 5.4. On observe une certaine symétrie axiale par rapport à la profondeur centrale de la colonne d'eau.

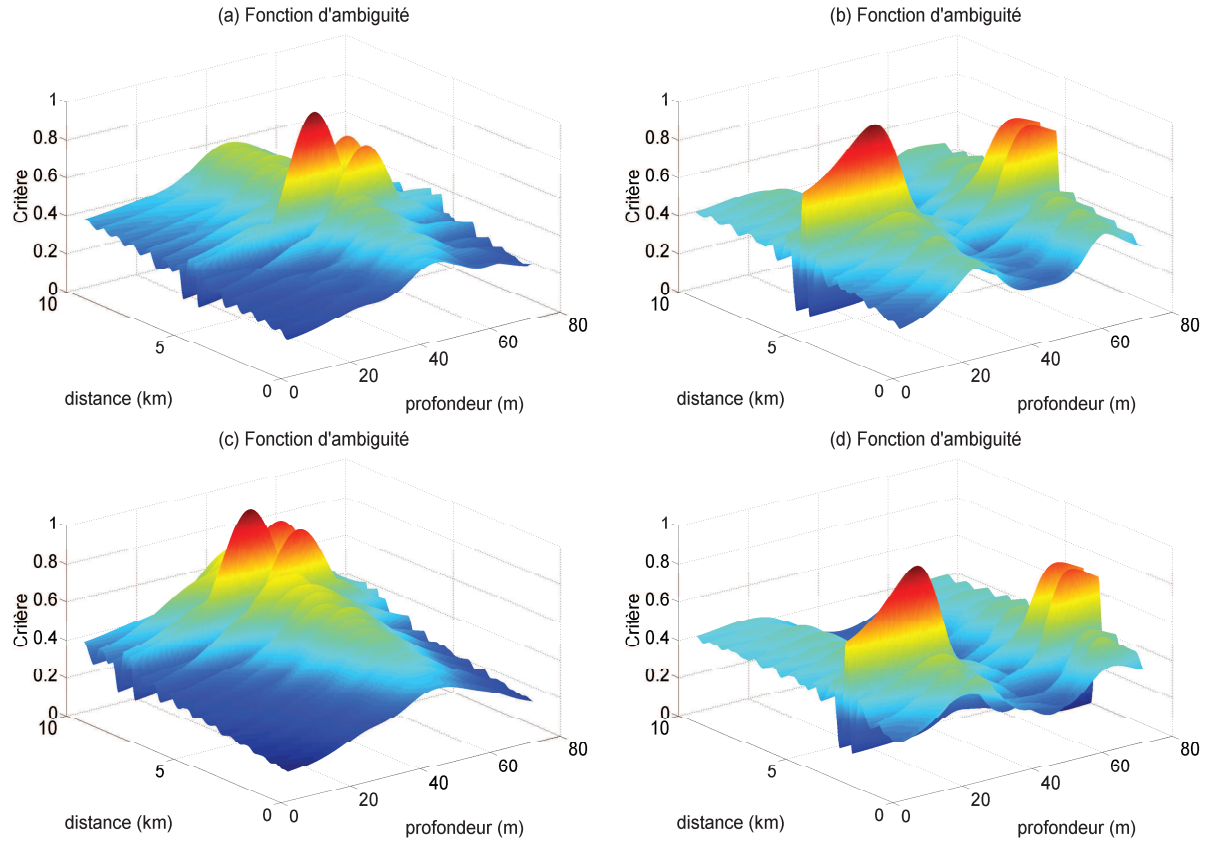


FIGURE 5.4 – Exemples de fonctions d'ambiguïtés du MMP, (a) en $r_s = 5000$ km et $z_s = 40$ m, (b) en $r_s = 5000$ km et $z_s = 25$ m, (c) en $r_s = 8000$ km et $z_s = 40$ m, (d) en $r_s = 3000$ km et $z_s = 25$ m, (dans tous les cas $z_r = 20$ m).

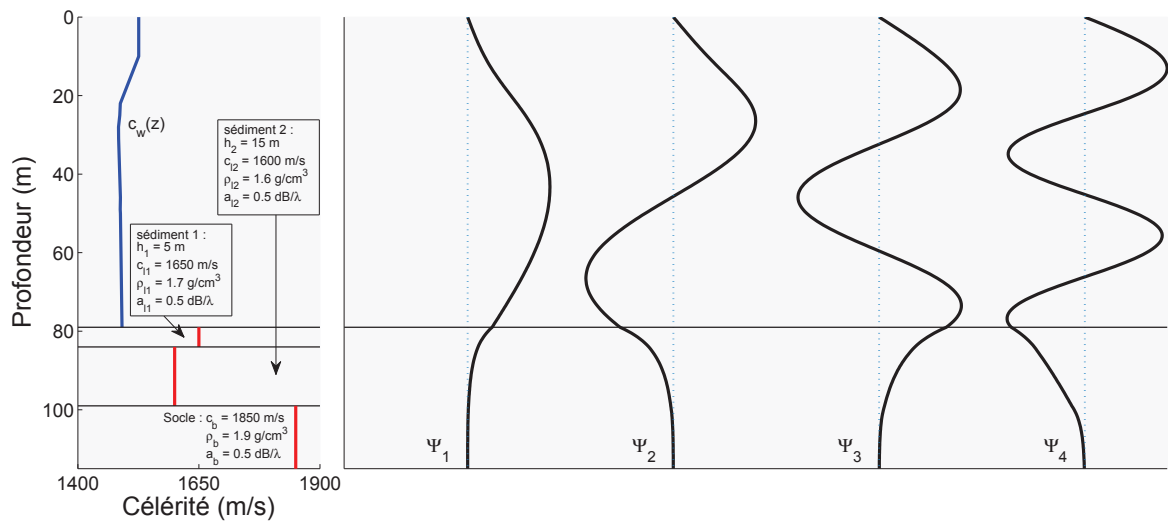


FIGURE 5.5 – Fonctions modales de l'environnement réel à 100 Hz (seul les quatre premiers modes sont représentés).

5.2.3 Validation du MEI en un point

Pour valider l'approche du MEI pour l'analyse des performances du MMP nous confrontons le MEI à des simulations de Monte-Carlo. Les simulations sont réalisées pour une position de la source uniquement, en $r_s = 5000$ m et $z_s = 40$ m. Deux cas sont considérés, un cas sans inadéquations et un cas en présence d'inadéquations (on suppose ici que $c_{l1} = 1620$ m/s au lieu de $c_{l1} = 1650$ m/s et $c_{l2} = 1570$ m/s au lieu de $c_{l2} = 1600$ m/s). Les simulations de Monte-Carlo sont effectuées avec $N_c = 1000$ itérations pour chaque RSB. Le choix du nombre de maxima locaux N_o (cf chapitre 3) est basé sur la structure observée de la fonction d'ambiguïté. Nous prenons ici $N_o = 20$ et prendrons également cette valeur pour toutes les autres simulations.

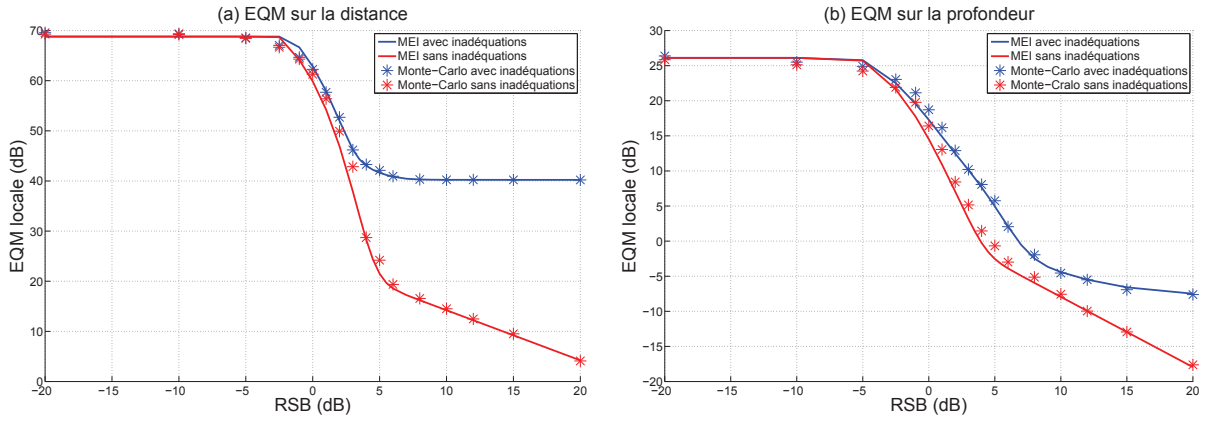


FIGURE 5.6 – MEI et simulations de Monte-Carlo en $r_s = 5000$ m et $z_s = 40$ m en l'absence et en présence d'inadéquations.

Dans les deux cas on observe une bonne adéquation entre les simulations de Monte-Carlo et le MEI, ce qui valide l'utilisation du MEI pour ce problème. Il faut noter que les simulations de Monte-Carlo nous ont pris quelques jours alors que le MEI nous a pris quelques secondes. Il est donc difficile d'utiliser des simulations de Monte-Carlo pour mener une analyse de performance dans de multiples configurations, d'où l'intérêt du MEI. Dans la suite, les performances sont évaluées à l'aide du MEI uniquement.

5.2.4 Performances sans inadéquations

Les performances sont tout d'abord évaluées en l'absence d'inadéquations, c'est à dire quand l'environnement utilisé pour réaliser la localisation est le même que l'environnement réel. Le MEI est réalisé pour une grille de $N_l \approx 2200$ positions de la source avec des incréments 100 m en distance et de 3 m en profondeur sur la région $r_s = [500, 10000]$ m et $z_s = [5, 75]$ m.

Sur la figure 5.7, l'analyse du MEI est moyennée sur les N_l positions pour évaluer les performances moyennes (l'EQM globale) en fonction du RSB. Différentes profondeurs du récepteur z_r sont considérées. Pour des profondeurs de récepteur $z_r = 20$ m et $z_r = 70$ m,

les performances sont assez similaires. Le seuil de décrochement se situe autour de 6 dB de RSB dans les deux cas et les EQM sont proches dans toutes les zones de RSB. La profondeur $z_r = 43$ m présente par contre des performances bien moins bonnes. Le seuil de décrochement se situe autour de 15 dB de RSB et l'EQM est bien plus importante que ce soit dans la zone asymptotique ou dans la zone de décrochement. Comme nous l'avons déjà fait remarquer au paragraphe 5.2.2 à l'aide de la figure 5.5, les fonctions modales $n = 2$ et $n = 4$ s'annulent toutes les deux autour de la profondeur $z_r = 43$ m. Ceci explique les mauvais résultats pour les profondeurs de récepteur aux alentours de cette profondeur car le MMP ne peut alors compter que sur les deux autres modes pour obtenir des informations sur la position de la source. Pour des profondeurs hors de l'intervalle $z_r = [40, 50]$ m les performances sont bonnes et similaires à celles des profondeurs $z_r = 20$ m et $z_r = 70$ m. Cela montre l'importance que revêt le positionnement du récepteur dans le colonne d'eau à des fins de localisation par MMP. Il faut de préférence éviter de positionner le récepteur à proximité du noeud de plusieurs modes. Dans la suite, nous fixons la profondeur du récepteur à $z_r = 20$ m.

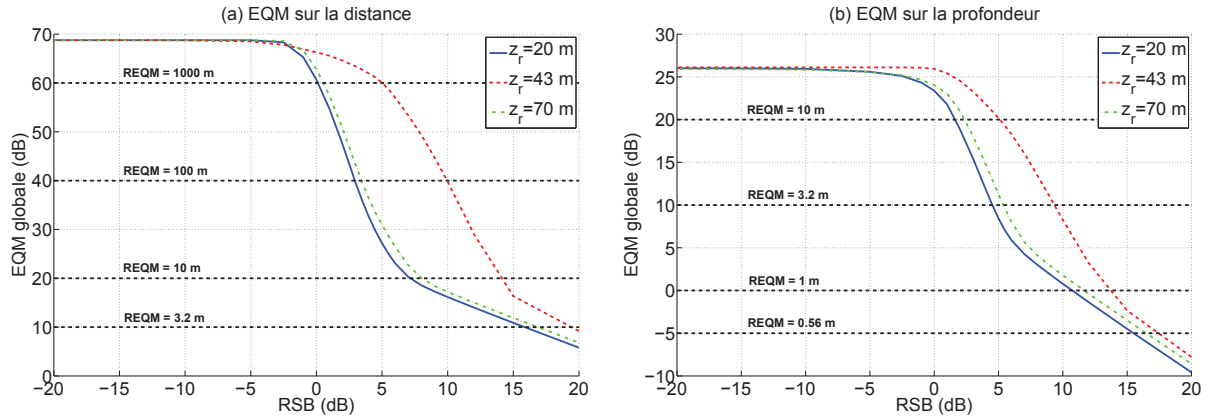


FIGURE 5.7 – Performances moyennes du MMP sur la région $r_s = [500, 10000]$ m et $z_s = [5, 75]$ m pour différentes profondeurs du récepteur z_r .

L'EQM globale rend compte des performances moyennes du MMP sur la région considérée, cependant ces performances sont susceptibles de varier significativement d'une position de la source à une autre. Pour appréhender ces variations, nous regardons les performances à chacune des positions pour lequel le MEI a été réalisé. La figure 5.8 présente plusieurs métriques de performance dans le plan (z_s, r_s) . On s'intéresse au seuil de décrochement, à l'EQM dans la zone de décrochement et à l'EQM dans la zone asymptotique. Le seuil de décrochement est déterminé pour chaque position en prenant le RSB à partir duquel $\sum_{n=1}^{N_o} P_e(\theta_n|\theta_0) > 10^{-4}$, c'est à dire en choisissant le RSB à partir duquel l'approximation de la probabilité que l'estimé sorte du lobe principale dépasse 10^{-4} . Il en sera de même pour toutes les autres simulations. Ce seuil a été choisi de manière empirique en confrontant $\sum_{n=1}^{N_o} P_e(\theta_n|\theta_0) > 10^{-4}$ à l'observation de la courbe d'EQM en fonction du RSB. Le seuil de décrochement nous informe sur le RSB en dessous duquel les performances vont significativement baisser mais ne rend pas compte de l'ampleur de cette dégradation. Pour un même seuil de décrochement, l'erreur va dépendre de l'écart (en distance et en profondeur) entre le lobe principal et les lobes secondaires. On évalue donc

également l'EQM à 4 dB de RSB pour étudier les performances dans la zone de décrochement (car le RSB de 4 dB se situe presque toujours dans la zone de décrochement). Pour évaluer les performances dans la zone asymptotique on s'intéresse à l'EQM à 20 dB de RSB. On observe effectivement des variations significatives de ces métriques selon la position de la source.

On peut remarquer que le RSB seuil augmente légèrement avec la distance r_s . Il existe également des zones de profondeurs z_s particulières pour lesquelles ce seuil est un peu plus important. Ces zones correspondent grossièrement aux profondeurs autour desquelles les fonctions modales s'annulent. Les variations de l'EQM sur la distance à 4 dB reflètent ces variations du seuil. Les variations de l'EQM sur la profondeur à 4 dB par contre ne reflètent pas totalement les variations du seuil. On retrouve une légère augmentation de l'erreur avec la distance mais les variations en profondeurs sont différentes. L'erreur augmente significativement lorsqu'on s'écarte du centre de la colonne d'eau. La symétrie approximative des fonctions modales introduit une ambiguïté approximativement symétrique qui conduit à des outliers plus éloignés de la bonne profondeur lorsqu'on s'éloigne du centre de la colonne d'eau (cf figure 5.3). Dans la zone asymptotique, l'EQM sur la distance augmente légèrement avec la distance r_s et présente également des zones de profondeurs z_s particulières pour lesquelles l'EQM est un peu plus importante. Ces zones correspondent aussi grossièrement aux profondeurs autour desquelles les fonctions modales s'annulent. L'EQM sur la profondeur augmente très peu avec la distance r_s , mais présente une grande variabilité avec la profondeur z_s . L'erreur augmente très fortement à proximité de la surface et dans une moindre mesure à proximité du fond. Cette augmentation tient à l'évolution des fonctions modales avec la profondeur dans ces régions. Les ratios d'amplitude entre fonction modale y évoluent lentement ce qui réduit la résolution de la discrimination en profondeur.

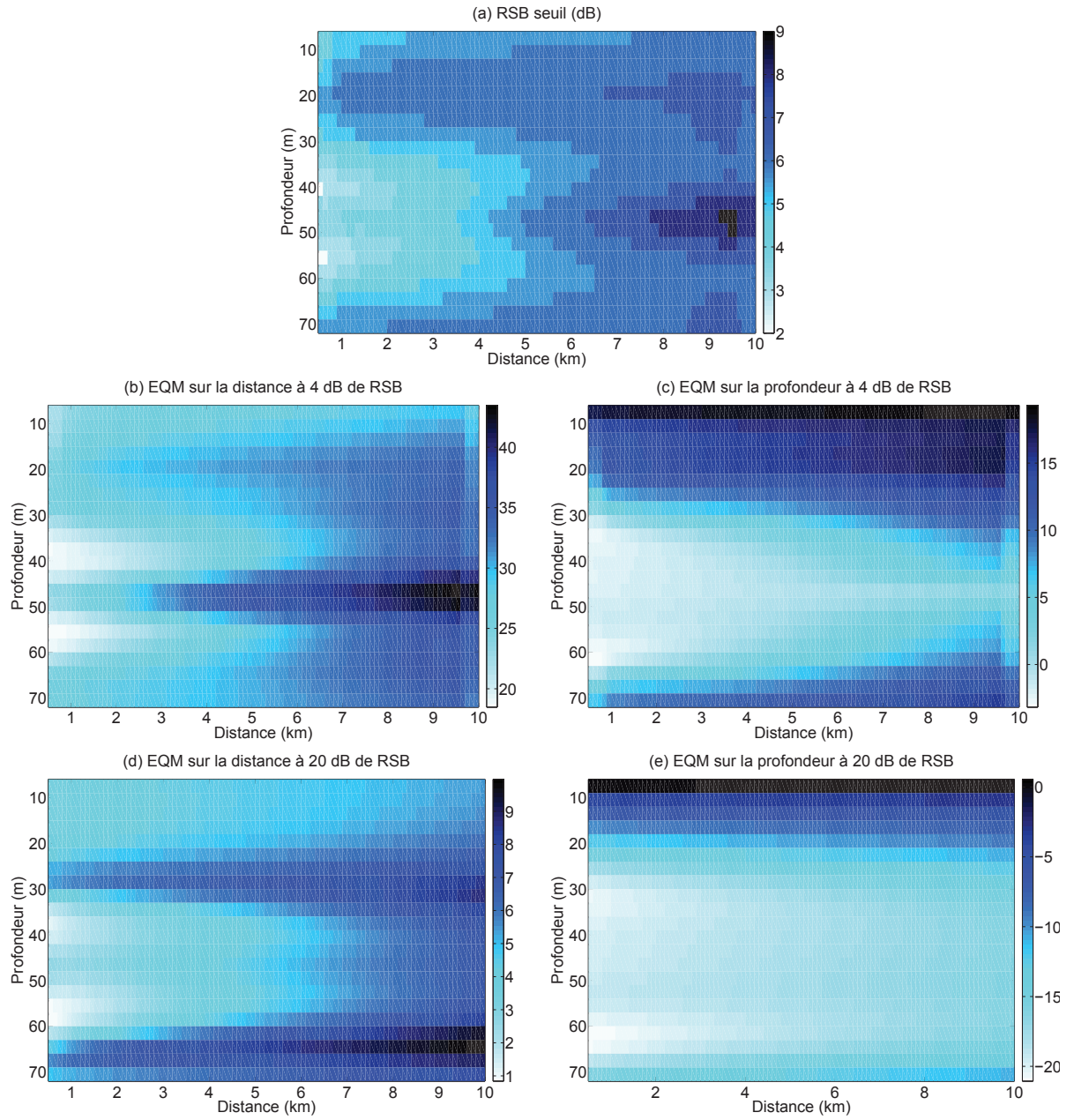


FIGURE 5.8 – (a) RSB seuil, (b) EQM sur la distance à 4 dB de RSB, (c) EQM sur la profondeur à 4 dB de RSB, (d) EQM sur la distance à 20 dB de RSB et (e) EQM sur la profondeur à 20 dB de RSB, sur la région $r_s = [500, 10000]$ m et $z_s = [5, 75]$ m.

5.2.5 Performances en présence d'erreurs sur le modèle environnemental

L'impact des inadéquations sur les performances est ici évalué pour les deux cas présenté dans la section 5.2.1. Nous présentons dans un premier temps les performances obtenues lorsque l'inversion est réalisée avec l'environnement B puis les performances obtenues lorsque l'inversion est réalisée avec l'environnement C. Le MEI est réalisé pour une grille de $N_l \approx 300$ positions avec des incréments 500 m en distance et de 4 m en profondeur sur la région $r_s = [500, 10000]$ m et $z_s = [5, 75]$ m.

5.2.5.1 Inversion avec l'environnement B

L'environnement B est représentatif d'une méconnaissance importante des propriétés du fond. La figure 5.9 présente l'EQM globale pour différentes valeurs de la célérité c_{bb} du fond dans l'environnement B. On remarque bien entendu une dégradation des performances avec l'introduction d'un biais à fort RSB du fait des inadéquations. Les performances dépendent fortement de la célérité c_{bb} choisie. La valeur qui donne les meilleurs performances moyennes est la célérité $c_{bb} = 1625$ m/s. Cela n'est pas très surprenant car les modes sont principalement affectés par les deux premières couches de sédiments de l'environnement réel dans lesquels les célérités sont $c_{l1} = 1600$ m/s et $c_{l2} = 1650$ m/s. La célérité c_{bb} qui donne les meilleurs résultats est la moyenne de ces deux célérités. La célérité du fond de l'environnement B qui donne les meilleurs résultats moyens est probablement celle qui dans l'ensemble permet d'approcher au mieux la propagation dans l'environnement réel. En dehors du cas $c_{bb} = 1575$ m/s les dégradations semblent acceptables, avec écart-type inférieur à 316 m en distance (EQM de 50 dB) et à 5.6 m en profondeur (EQM de 15 dB) jusqu'à un RSB de 7.5 dB.

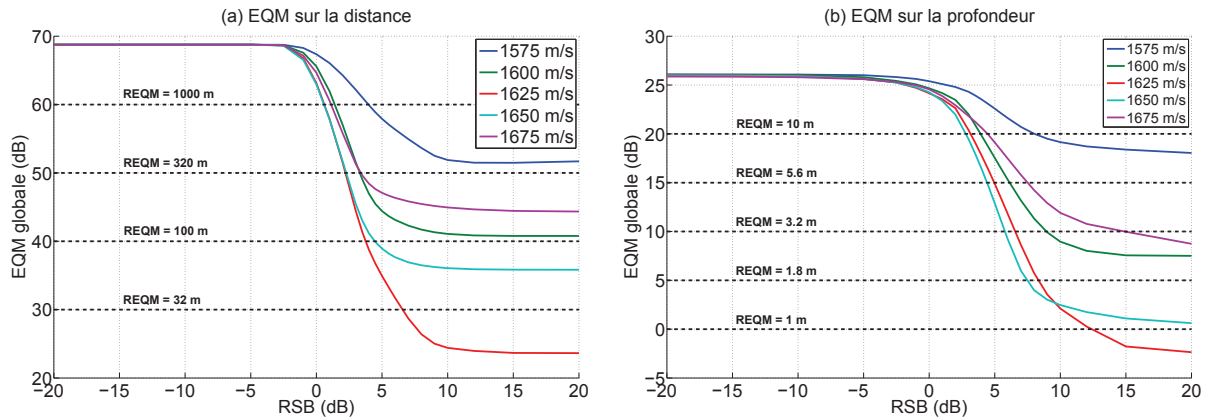


FIGURE 5.9 – Inversion avec l'environnement B. Performances moyennes du MMP sur la région $r_s = [500, 10000]$ m et $z_s = [5, 75]$ m pour différentes valeurs de célérités c_{bb} du fond. Profondeur du récepteur $z_r = 20$ m.

Sur la figure 5.10 on présente le RSB seuil, l'EQM sur la distance à 20 dB et l'EQM sur la profondeur à 20 dB dans le plan (z_s, r_s) pour la célérité $c_{bb} = 1625$ m/s. Sur la figure

5.11, on présente les mêmes métriques mais pour la célérité $c_{bb} = 1675$ m/s. Ces figures permettent d'apprécier l'augmentation du seuil et des EQM à 20 dB en présence d'inadéquations du fond par comparaison avec la figure 5.8. Les variations de ces métriques dans le plan (z_s, r_s) sont quelques peu différentes du cas sans inadéquations même si l'on retrouve les mêmes tendances. En présence d'inadéquations, les variations dépendent à la fois des fonctions modales de l'environnement réel et des fonctions modales de l'environnement supposé. Il faut noter qu'entre les deux célérités $c_{bb} = 1625$ m/s et $c_{bb} = 1675$ m/s les variations (z_s, r_s) des métriques sont également quelque peu différentes. Par exemple, pour $c_{bb} = 1625$ m/s les moins bonnes performances ont lieu aux profondeurs autour de $z_s = 20$ m alors que pour $c_{bb} = 1675$ m/s elles ont lieu autour de $z_s = 50$ m. Il est ainsi possible que pour une position particulière de source et un RSB donné, les performances soient meilleures avec une autre célérité que la célérité $c_{bb} = 1625$ m/s qui nous a donné les meilleures performances moyennes.

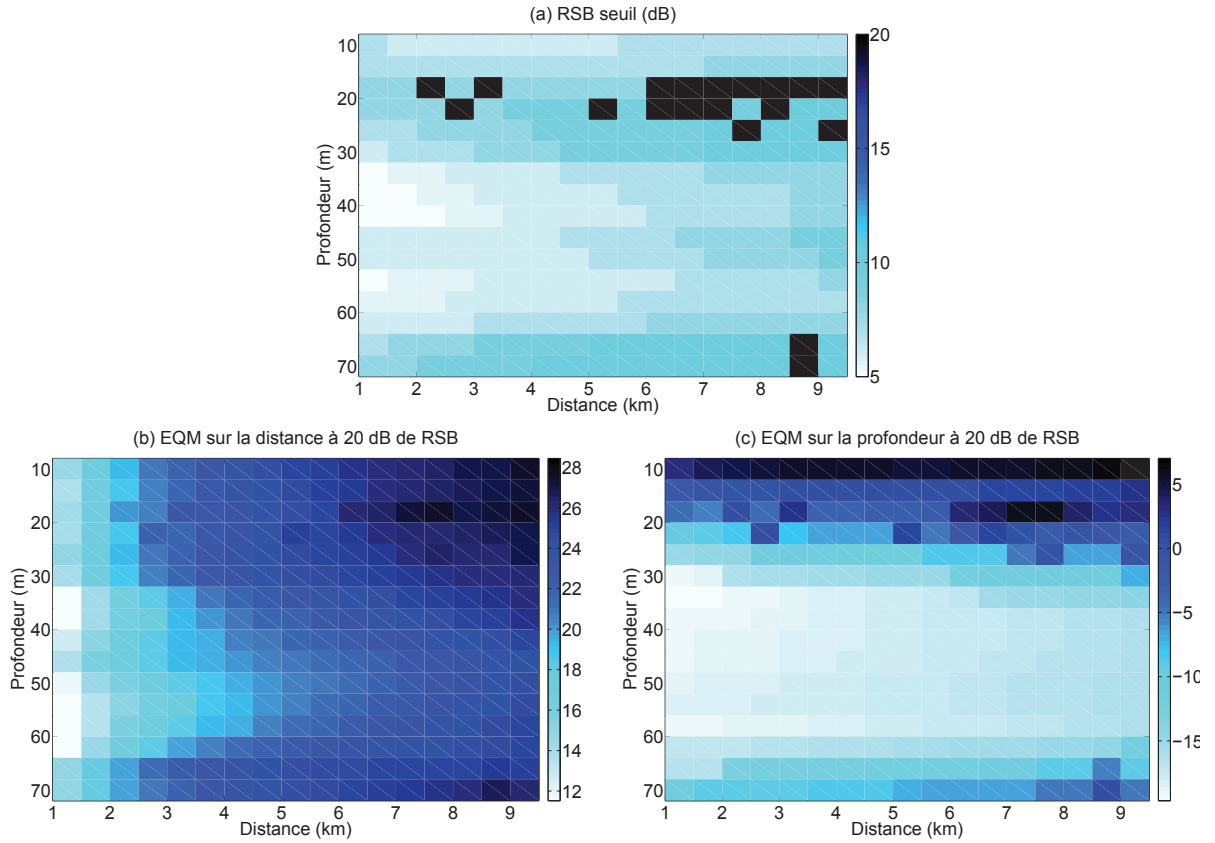


FIGURE 5.10 – Inversion avec l'environnement B. (a) RSB seuil, (b) EQM sur la distance à 20 dB de RSB et (c) EQM sur la profondeur à 20 dB de RSB, sur la région $r_s = [500, 10000]$ m et $z_s = [5, 75]$ m. Profondeur du récepteur $z_r = 20$ m. Célérité dans le fond $c_{bb} = 1625$ m/s.

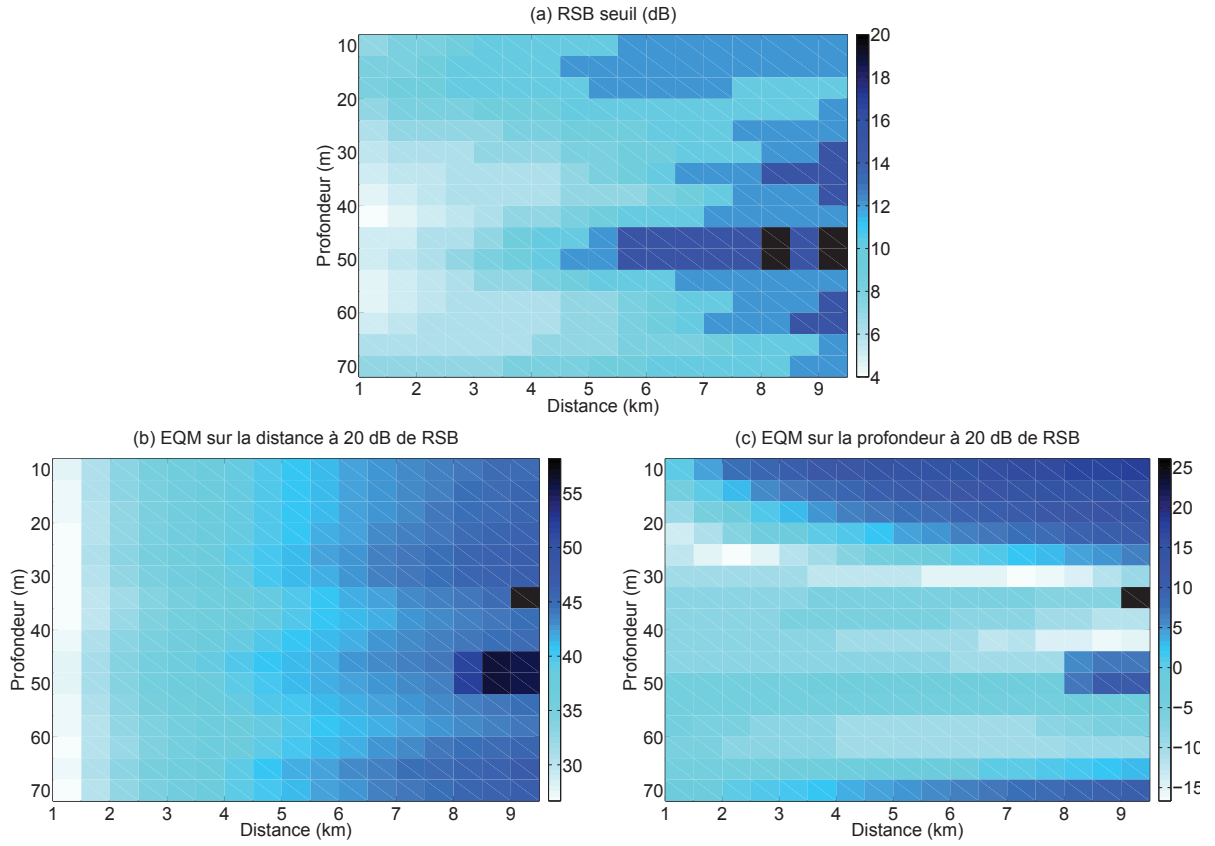


FIGURE 5.11 – Inversion avec l’environnement B. (a) RSB seuil, (b) EQM sur la distance à 20 dB de RSB et (c) EQM sur la profondeur à 20 dB de RSB, sur la région $r_s = [500, 10000]$ m et $z_s = [5, 75]$ m. Profondeur du récepteur $z_r = 20$ m. Célérité dans le fond $c_{bb} = 1675$ m/s.

5.2.5.2 Inversion avec l’environnement C

L’environnement C est représentatif d’une méconnaissance importante à la fois de la célérité dans l’eau et du fond. La figure 5.12 présente l’EQM globale pour différentes valeurs de la célérité c_{bc} du fond dans l’environnement C. On remarque une dégradation importante des performances par rapport au cas précédent où seul le fond était mal connu. L’écart-type n’est jamais inférieur à 696 m en distance (EQM de 56.85 dB) et à 13 m en profondeur (EQM de 22.32 dB). Les performances dépendent légèrement de la célérité c_{bc} choisie mais ces variations sont moins flagrantes. Il n’y a pas de réelle logique dans les performances des différentes célérités. Aucune des célérités ne permet probablement d’approcher suffisamment la propagation dans l’environnement réel.

Sur la figure 5.13 on présente le RSB seuil, l’EQM sur la distance à 30 dB et l’EQM sur la profondeur à 30 dB dans le plan (z_s, r_s) pour la célérité $c_{bc} = 1600$ m/s. Les variations du RSB seuil sont dépourvues de structure particulière. L’EQM sur la distance augmente toujours avec la distance mais ne présente plus de variations bien marquées avec la profondeur. L’EQM sur la profondeur comporte des zones particulières où l’erreur

devient très importante. L'impact des inadéquations selon la position est donc ici plus difficile à appréhender. Cela est dû à la grande différence entre l'environnement réel et l'environnement C.

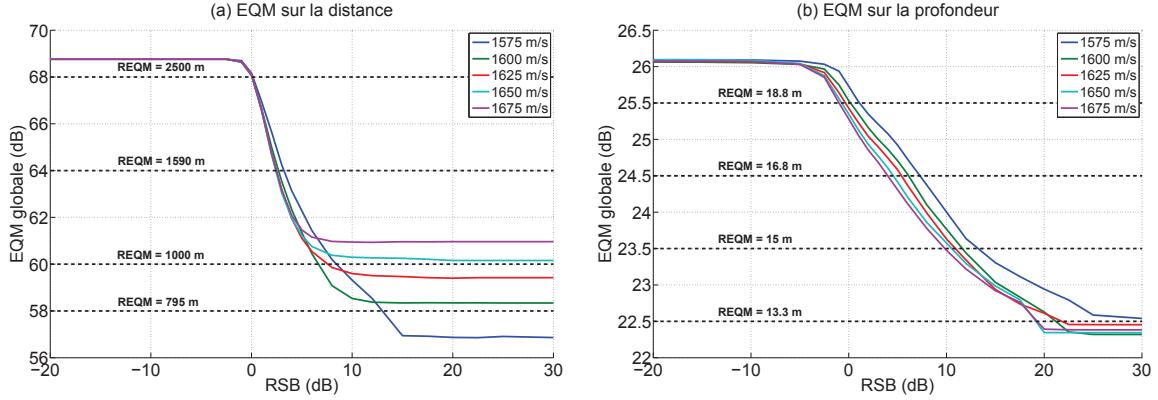


FIGURE 5.12 – Inversion avec l'environnement C. Performances moyennes du MMP sur la région $r_s = [500, 10000]$ m et $z_s = [5, 75]$ m pour différentes valeurs de célérités c_{bc} du fond. Profondeur du récepteur $z_r = 20$ m.

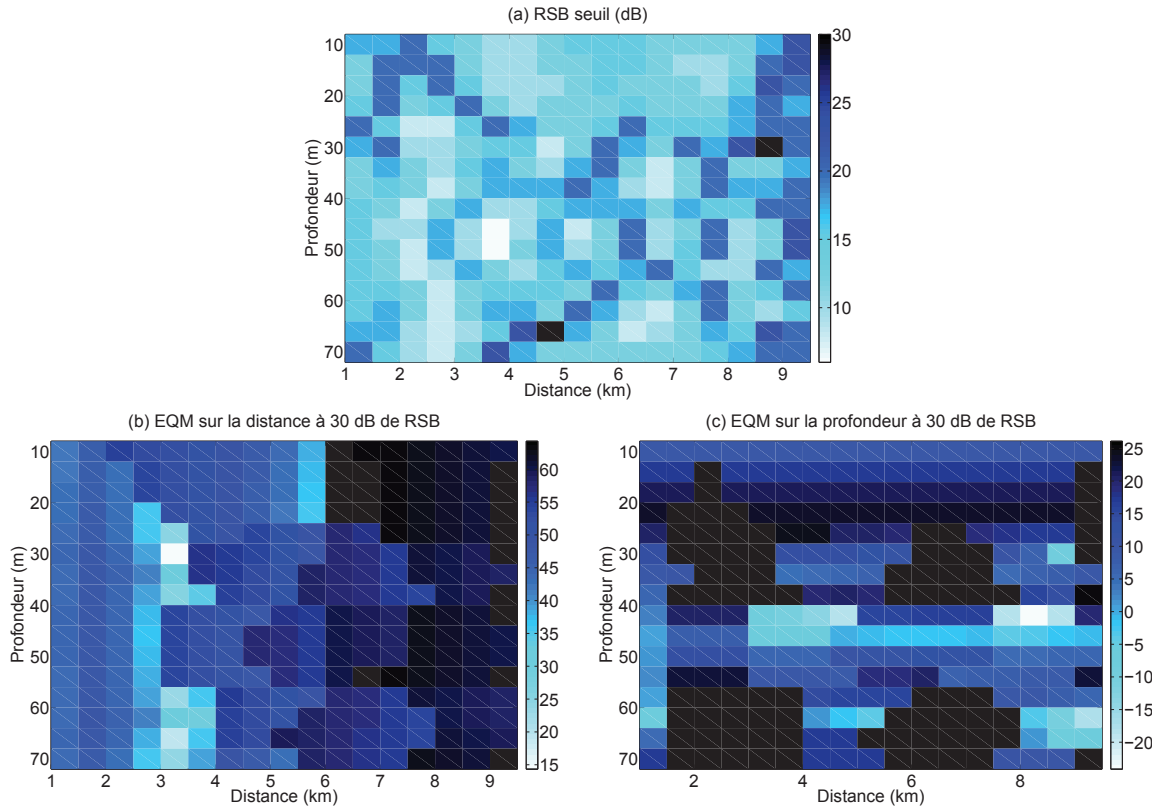


FIGURE 5.13 – Inversion avec l'environnement C. (a) RSB seuil, (b) EQM sur la distance à 30 dB de RSB et (c) EQM sur la profondeur à 30 dB de RSB, sur la région $r_s = [500, 10000]$ m et $z_s = [5, 75]$ m. Profondeur du récepteur $z_r = 20$ m. Célérité dans le fond $c_{bc} = 1600$ m/s.

5.3 Conclusion

Les performances du MMP ont été évaluées pour des scénarios typiques du MMP à l'aide du MEI introduit dans le chapitre 3. En l'absence d'inadéquations, on observe une dégradation importante des performances quand le récepteur est situé au niveau d'un noeud commun à deux modes. Le positionnement du récepteur à distance de lieux propices à l'annulation de plusieurs modes est donc à considérer lors de la mise en place du capteur. Dans le cas où le fond est mal spécifié, les performances semblent rester acceptables si la célérité du fond choisi n'est pas trop éloignée de la célérité moyenne des couches de sédiments dans lesquelles les modes se propagent. Les résultats suggèrent qu'il est possible d'obtenir de meilleures performances en cherchant la célérité qui permet au mieux d'approcher l'environnement réel. Dans le cas où le fond et la célérité dans la colonne d'eau diffèrent grandement de l'environnement réel, les performances sont par contre très dégradées. L'environnement supposé est probablement trop différent de l'environnement réel pour permettre une bonne localisation.

« There are times when a race plan changes and become more difficult, I like to see it as an opportunity to do something different. »

Alberto Contador

Conclusion et perspectives

Conclusion

Le travail de recherche présenté dans ce mémoire se focalise sur la résolution de problèmes inverses en acoustique sous-marine par les méthodes de type *matched-field processing* (MFP). L'estimation des paramètres d'intérêt par MFP s'effectue en comparant champ de pression observé avec un champ de pression issu de la résolution de l'équation d'onde à l'aide d'un modèle de l'environnement océanique. Cette méthode permet la localisation de source et la caractérisation de l'environnement marin aux basses fréquences en champ lointain. Elle souffre par contre d'une difficulté majeure : la modélisation de l'environnement est toujours imparfaite ce qui peut considérablement dégrader les performances. L'objectif de la thèse était d'une part de proposer des outils afin de caractériser les performances du MFP en portant une attention particulière aux erreurs de modélisation, et d'autre part d'améliorer le processus d'inversion pour le rendre robuste à ces erreurs.

Les deux premiers chapitres de ce mémoire sont consacrés à la description du problème direct et à la résolution du problème inverse par MFP. Le problème direct consiste à calculer le champ acoustique dans le guide d'onde océanique à l'aide de l'équation d'onde et d'un modèle de l'environnement (profondeur, célérités dans la colonne d'eau et dans le fond...). La difficulté principale n'est pas tant la résolution de l'équation d'onde mais plutôt l'obtention d'un modèle détaillé et fidèle de l'environnement océanique. Les hétérogénéités comme les ondes internes ou la rugosité des interfaces ne peuvent pas être mesurées sur la base d'une réalisation. La structure générale du guide d'onde et les valeurs des paramètres ne sont jamais parfaitement connus. Le problème inverse peut être abordé comme un problème d'estimation au sens du maximum de vraisemblance ou comme un problème d'inférence bayésienne. Il souffre du bruit ambiant toujours présent sur les mesures et des erreurs de modélisation dans le problème direct.

Les principales contributions du travail de thèse à l'égard des objectifs fixés sont développées dans les trois chapitres suivants.

Dans le chapitre 3, nous avons développé des outils statistiques de traitement du signal permettant de prédire les performances des estimateurs du maximum de vraisemblance du MFP. La prédiction des performances du MFP n'est pas un problème simple si l'on souhaite éviter de recourir aux simulations de Monte-Carlo souvent très lourdes en charge de calcul. L'estimation souffre d'ambiguïtés importantes pouvant entraîner à faible RSB des erreurs non-locales qui ne sont pas prises en compte par l'outil habituel

de mesure des performances que constitue la borne de Cramer-Rao. La borne minimale d'estimation de Ziv-Zakai (BZZ) et la méthode d'approximation des performances appelée méthode des erreurs d'intervalle (MEI) sont adaptées à ce problème. En outre, le MEI permet de prendre en compte les inadéquations dans l'analyse des performances. Ces méthodes reposent toutes deux sur le calcul d'une probabilité d'erreur binaire (en l'absence ou en présence d'inadéquations). Nous avons mis au point une technique permettant de calculer cette probabilité d'erreur binaire pour les deux modèles de signal source que sont le modèle stochastique et le modèle déterministe. L'originalité de ce travail repose principalement sur la considération du modèle déterministe car le modèle stochastique a déjà fait l'objet de travaux antérieurs. Le MEI nécessite également le calcul d'une approximation de l'EQM asymptotique. En l'absence d'inadéquations cette EQM est donnée par la borne de Cramer-Rao. En présence d'inadéquations, nous recourons à un développement limité de l'erreur. Au final, les résultats obtenus nous permettent d'utiliser la BZZ et le MEI pour analyser les performances du MFP en l'absence d'inadéquations (pour les deux modèles de signal source), et d'utiliser le MEI pour analyser les performances du MFP en présence d'inadéquations (pour le modèle de signal source déterministe). Les méthodes mises au point donnent des résultats proches de ceux obtenues avec des simulations de Monte-Carlo mais dans un temps nettement moins important.

Dans le chapitre 4, nous avons proposé une méthode bayésienne de localisation de source par MFP adaptée aux milieux de propagation sous-marins incertains et donc robuste aux erreurs de modélisation de l'environnement océanique. La méthode est originale dans son approche. L'incertitude sur le milieu de propagation est prise en compte en modélisant la fonction de Green (fonction de transfert) entre la source et les récepteurs comme un vecteur aléatoire. Quelques hypothèses sur la propagation modale sont introduites pour construire une densité de probabilité de fonction de Green prenant en compte les incertitudes de l'environnement. La densité de probabilité de la fonction de Green est ainsi représentative d'une incertitude sur les phénomènes de propagation liée à l'incertitude sur l'environnement. L'intégration de la densité de probabilité *a posteriori* (DPP) par rapport à la densité de probabilité de la fonction de Green permet d'obtenir la DDP des paramètres de localisation. L'intégration par force brute ayant un coût de calcul prohibitif, l'intégrale est réduite à une intégrale mono-dimensionnelle ce qui accélère considérablement l'intégration et rend l'ensemble du processus de localisation efficace en temps de calcul. Le formalisme bayésien permet d'obtenir des mesures quantitatives de la confiance pouvant être accordée à chaque localisation à travers l'analyse de la DPP, ce qui est très intéressant en contexte opérationnel. Des simulations de Monte-Carlo attestent de sa robustesse de la méthode vis-à-vis des erreurs de modélisation de l'environnement. Elle présente de meilleures performances que d'autres méthodes de la littérature en terme de probabilité de bonne localisation et d'erreur quadratique moyenne.

Enfin, le chapitre 5 constitue une ouverture vers le contexte mono-capteur. L'échantillonnage du champ acoustique à l'aide de plusieurs capteurs donne la diversité spatiale souvent nécessaire aux méthodes du MFP. Si le signal source le permet, on peut cependant se passer de cette diversité spatiale et utiliser un seul capteur pour réaliser l'inversion. Lorsque la source est courte en temps des méthodes temps-fréquence permettent parfois de séparer les modes composant le champ acoustique à l'aide d'un unique hydrophone.

Ces modes peuvent alors être exploités pour estimer les paramètres d'intérêts en utilisant une variante du MFP appelée *matched-mode processing* (MMP). Nous avons utilisé les outils de prédiction des performances développés au chapitre 3 pour analyser les performances du MMP mono-capteur dans différentes configurations en présence et en l'absence d'erreurs sur le modèle environnemental. Cette analyse a permis de mieux appréhender le problème de localisation par MMP.

Perspectives

Les travaux présentés dans ce mémoire et la réflexion nourrie par ces trois années de thèse ouvrent certaines perspectives. Nous découpons ces perspectives en trois axes de recherche : (i) prédiction des performances, (ii) localisation de source et (iii) contexte mono-capteur.

Prédiction des performances

Les travaux relatifs à la prédiction des performances présentés dans ce mémoire concernent les estimateurs du maximum de vraisemblance du MFP. Ces travaux pourraient aisément être étendus à l'estimateur bayésien du maximum a posteriori (MAP). Cette extension impliquerait de considérer les densités *a priori* $p(\boldsymbol{\theta}_1)$ et $p(\boldsymbol{\theta}_0)$ lors du calcul des probabilités d'erreurs binaires, ce qui n'entraînerait qu'une légère modification de ce calcul. Notons que s'intéresser à l'estimateur du maximum de vraisemblance revient à s'intéresser au MAP dans le cas particulier où la densité $p(\boldsymbol{\theta})$ est uniforme. L'extension proposée permettrait de considérer des densités différentes.

Nous avons souligné que même si les travaux réalisés pouvaient en théorie s'appliquer à la caractérisation de l'environnement marin (tomographie, inversion géoacoustique), cela pouvait être délicat en pratique à cause du grand nombre de paramètres d'intérêt. L'évaluation de la BZZ lorsqu'il y a plus de deux paramètres à estimer devient un processus relativement long en temps de calcul. Le MEI peut être difficile à mettre en place si le jeu de paramètres est de grande dimension car il nécessite alors d'effectuer une recherche de maxima locaux dans un espace de grande dimension. Néanmoins, cette recherche peut probablement être réalisée en un temps raisonnable en adaptant les algorithmes de recuit simulé ou les algorithmes génétiques classiquement utilisés pour la recherche du maximum global lors de l'inversion géoacoustique [Gerstoft94, Dosso01]. Pour une configuration donnée (c'est à dire un jeu de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ donné), la recherche des maxima locaux de la fonction d'ambiguïté n'est à réaliser qu'une fois avant d'approximer l'EQM locale. L'utilisation du MEI pour l'analyse des performances de la tomographie et de l'inversion géoacoustique nous semble donc être une perspective de travail intéressante.

Pour étudier les performances en présence d'inadéquations nous nous sommes focalisé sur le MEI car la notion de borne de performance en présence d'inadéquations n'est pas un problème simple. Néanmoins, nous avons mentionné que des travaux très récents de Richmond et Horowitz [Richmond15] posaient un cadre rigoureux au développement de bornes déterministes en présence d'inadéquations. Pour prendre en compte les

inadéquations, ces bornes se restreignent à une classe d'estimateur. Ces travaux sont très prometteurs et ouvrent une brèche qu'il serait intéressant d'explorer.

Enfin, il serait également utile de développer des outils de prédiction des performances pour le modèle d'incertitude sur la fonction de Green introduit au chapitre 4. Cela permettrait probablement de mieux comprendre les potentialités et limitations de la méthode de localisation développée au chapitre 4. Cependant, ce travail paraît à première vue assez difficile du fait de la plus grande complexité du modèle.

Localisation de source

La méthode de localisation de source robuste aux incertitudes sur le milieu de propagation proposée au chapitre 4 permet d'obtenir une DPP $p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{y})$. Cette DPP pourrait être utilisée avantageusement dans un problème de suivi (*tracking* en anglais) de source. En couplant cette probabilité à un *a priori* sur le déplacement de la source il serait possible de fournir une densité *a priori* $p(\boldsymbol{\theta})$ plus précise à chaque tentative de localisation de la source en mouvement.

Par ailleurs, dans ce mémoire nous nous sommes concentré sur un problème d'estimation mono-source, c'est à dire où le signal utile analysé provient d'une seule source. Il serait intéressant de se pencher également sur le cas multi-sources. Deux cas peuvent typiquement se présenter :

- On dispose de M fréquences et il y a au total entre 1 et M sources. Ce cas peut par exemple se présenter si l'on a isolé plusieurs raies spectrales de navires ou de sous-marins mais que l'on ne sait pas à quelle source appartient chacune de ces raies (elles peuvent toutes provenir d'une seule source ou de différentes sources).
- On dispose de M fréquences et il y a P sources par fréquence. Ce cas peut se présenter lorsqu'on étudie des fréquences provenant de bruits large bande de navires ou de sous-marins. Ces bruits se superposent et il y peut donc y avoir plusieurs sources pour chaque fréquence.

L'ajout d'une source au problème de localisation par MFP implique l'ajout au minimum de deux paramètres supplémentaires à estimer (distance, profondeur et éventuellement azimuth). Cela peut considérablement augmenter le temps de calcul et contrarier l'application en contexte opérationnel, d'autant plus qu'il faut aussi gérer le problème de l'incertitude sur l'environnement océanique. Une réécriture du problème de localisation ou l'utilisation de méthodes non-paramétriques serait peut être plus judicieuse. Une réécriture du problème pourrait consister par exemple à estimer une carte d'amplitude (distance, profondeur) et à réaliser l'inférence à l'aide de cette carte.

Pour améliorer la robustesse de la localisation vis-à-vis des incertitudes sur l'environnement océanique, d'autres approches que celle proposée dans ce mémoire pourraient aussi être explorées. L'invariant océanique distance/fréquence [Chuprov82, Cockrell10b] est un scalaire qui décrit la propagation acoustique et qui dépend peu de l'environnement océanique dans les milieux petits fonds. Des méthodes de localisation en distance de sources large bande en mouvement se basent sur ce principe ce qui leur assure une certaine robustesse [Turgut10, Cockrell10a]. Cela laisse à supposer qu'il existe une certaine stabilité du champ acoustique vis-à-vis de l'environnement pouvant être exploitée

pour localiser la source. Il serait intéressant de faire le rapprochement entre cet invariant océanique et les approches modales de la localisation qui cherchent justement à exploiter uniquement les modes qui sont les moins sensibles aux détails de l'environnement océanique. Par ailleurs, une solution au problème des erreurs sur le modèle environnemental pourrait être de faire un minimum d'hypothèses sur le champ acoustique en supposant simplement que le champ acoustique est constitué d'une somme de modes. Une estimation des nombres d'ondes des modes à partir des données recueillies sur une antenne horizontale [Le Courtois14b] pourrait alors être utilisée pour localiser la source en distance.

Contexte mono-capteur

Les simulations que nous avons réalisées pour analyser les performances du MMP mono-capteur pourraient être poursuivies. Les configurations d'étude peuvent se décliner à l'infini. L'influence des erreurs de modélisation de l'environnement en fonction de la position du récepteur ou encore l'influence du filtrage modal pourraient par exemple être étudiées. Il serait également intéressant d'examiner l'influence d'une sélection des modes ou de certaines fréquences des modes sur les performances pour voir si cela pourrait permettre d'améliorer la robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation de l'environnement.

Le filtrage des modes à l'aide d'un seul capteur est possible sous certaines conditions sur le signal source. Ces conditions ne sont pas clairement définies, on dit qu'il faut que la source soit « courte en temps ». Il serait utile de formaliser plus clairement ces conditions. On pourrait notamment se baser sur les travaux de Matz et Hlawatsch sur les sous-espaces temps-fréquence [Hlawatsch98, Matz02]. Il serait ainsi possible d'injecter un modèle du signal source pour le MFP et de se passer du filtrage modal.

Annexe A

Ondes internes

Cette annexe donne des informations supplémentaires sur les ondes internes linéaires et les ondes internes non linéaires.

A.1 Ondes internes linéaires

Le déplacement des masses d'eau due aux ondes internes linéaires peut s'exprimer comme une somme de modes [Flatté79] :

$$\eta(r, z, t) = \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} a_j(\omega) W_j(\omega, z) \exp(i(k_{hj}r - \omega t)) d\omega, \quad (\text{A.1})$$

ou $a_j(\omega)$ est le spectre d'amplitude du mode j , W_j est la fonction modale du mode j et k_{hj} est le nombre d'onde horizontal du mode j . Les équations du mouvement d'un élément de fluide permettent, sous quelques approximations, d'établir l'équation suivante [Flatté79] :

$$\frac{d^2 W_j}{dz^2} + k_{hj}^2 \left[\frac{N^2(z) - \omega^2}{\omega^2 - f_c^2} \right] W_j = 0. \quad (\text{A.2})$$

La fréquence inertielle vaut $f_c = 2\Omega \sin(\text{latitude})$ avec Ω la vitesse angulaire de rotation de la terre, et la fréquence de flottabilité vaut :

$$N(z) = \sqrt{-\frac{g}{\rho} \left(\frac{\delta \rho}{\delta z} \right)_{pot}}, \quad (\text{A.3})$$

où g est l'accélération de pesanteur, ρ la densité de l'eau et $(\frac{\delta \rho}{\delta z})_{pot}$ le gradient de densité potentielle⁰ à la profondeur z . La résolution de l'équation (A.2) avec les conditions aux limites $W_j(z = 0) = W_j(z = H) = 0$, ou H est la hauteur d'eau, donne les fonctions

modales $W_j(\omega, z)$ ainsi que la relation de dispersion $k_{hj}(\omega)$. Sous l'approximation WKB, on obtient :

$$W_j(z) \approx A \sin \left(i \frac{k_j}{f_c} \int_0^z N(z) dz \right), \quad (\text{A.4})$$

où A est un facteur de normalisation tel que $\int |W_j(z)|^2 N^2(z) dz = 0$, et

$$k_{hj}^2 \approx \frac{k_j^2}{f_c^2} (\omega^2 - f_c^2) \frac{N^2(z)}{N^2(z) - \omega^2} \approx \frac{k_j^2}{f_c^2} (\omega^2 - f_c^2), \text{ avec } k_j = j\pi f_c / \int_0^H N(z) dz. \quad (\text{A.5})$$

Sous l'approximation WKB les fonctions modales W_j ne dépendent pas de la fréquence, en réalité cette dépendance existe mais elle est faible et peut être négligée.

L'élément clé de la description des ondes internes est le spectre d'amplitude $a_j(\omega)$ de chaque mode, pour lequel il n'existe pas de modèle théorique. Il existe cependant des modèles expérimentaux pour la densité spectrale d'énergie $\langle |a_j(\omega)|^2 \rangle$. Des campagnes de mesures réalisées dans les années 70 ont permis à Garrett et Munk de construire un modèle pour la densité spectrale d'énergie $\langle |a_j(\omega)|^2 \rangle$ en milieu grand fond [Garrett72, Garrett75, Garrett79]. Ce modèle a ensuite été adapté plus récemment pour des milieux petits fonds [Tielb rger97, Yang99]. Dans tous les cas, le modèle a la forme suivante :

$$\langle |a_j(\omega)|^2 \rangle = E_0 M (j^2 + j_*^2)^{-p/2} E_j(\omega), \quad (\text{A.6})$$

où M un facteur de normalisation tel que $\sum_{j=1}^{j_{max}} M (j^2 + j_*^2)^{-p/2} = 1$, et E_0 représente l'énergie des ondes internes. Les éléments p , j_* et $E_j(\omega)$ sont différents selon les modèles.

Grands fonds

En milieu grand fond, le modèle proposé par Garrett et Munk convient pour décrire les ondes internes dans la plus part des régions du globe [Garrett79]. Il est par conséquent largement adopté par les acousticiens, en témoigne les nombreuses études sur l'influence des ondes internes sur la propagation acoustique en grand fond [Colosi99]. Pour ce modèle, $j_* = 3$, $p = 2$ et :

$$E_j(\omega) = \begin{cases} Q \frac{f_c \sqrt{\omega^2 - f_c^2}}{\omega^3} & \text{si } f_c < \omega < N(z) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (\text{A.7})$$

où Q est un facteur de normalisation tel que $\int E_j(\omega) d\omega = 1$.

Petits fonds

En milieu petit fond, il ne semble pas y avoir de modèle qui convienne à tous les milieux. Il reste encore beaucoup de travail pour caractériser les ondes internes en milieu petit fond. On peut toutefois utiliser les résultats de [Tielb rger97] et [Yang99] en l'absence de meilleur modélisation. [Tielb rger97] propose de prendre $p = 4$, $j_* = 3$ et le même $E_j(\omega)$ que précédemment, alors que [Yang99] montre que $p = 3$ et $j_* = 1$ sont les valeurs qui permettent d'adapter au mieux la formule (A.6)   ses données avec :

$$E_j(\omega) = \begin{cases} Q \frac{f_c \sqrt{\omega^2 - f_c^2}}{\omega^2 \sqrt{N^2 - f_c^2 + \omega^2}} & \text{si } f_c < \omega < N(z) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad (\text{A.8})$$

où Q est un facteur de normalisation tel que $\int E_j(\omega) d\omega = 1$, et $N = \int_0^H N(z) dz / H$.

On donne la densité spectral d'énergie des ondes internes dans un milieu petit fond (cf. Figure A.1), accompagnée de la densité spectral d'énergie obtenue avec le modèle d'ondes internes en grand fond ainsi que la densité spectral d'énergie obtenue avec la modèle d'ondes internes en petit fond (voir modèles ci-dessus). Il faut noter que l'énergie des ondes internes est plus importante dans les basses fréquences près de la fréquence inertielle que dans les hautes fréquences près de la fréquence de flottaison.

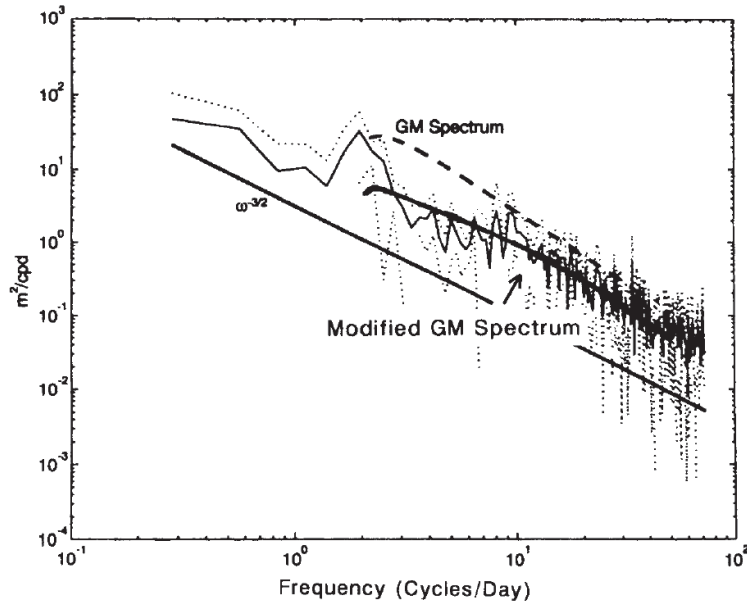


FIGURE A.1 – Image issue de [Yang99]. Spectre des ondes internes dans la Mer de Barents comparé au spectre de Garrett et Munk ainsi qu'au spectre modifié pour les milieux petits fonds de Yang.

La densité spectrale d'énergie $\langle |a_j(\omega)|^2 \rangle$ représente la partie aléatoire de la description des ondes internes linéaires, de la même manière qu'un bruit peut être décrit par sa densité spectrale de puissance. Elle décrit d'ailleurs totalement les ondes internes linéaires car celles-ci sont supposées suivre un processus aléatoire Gaussien. Peu d'études cherchent à vérifier cette hypothèse [Briscoe77] et le modèle Gaussien est utilisé dans un souci de simplicité plutôt que sur la base d'une réalité bien établie. Le modèle Gaussien peut toutefois se justifier en vertu du théorème central limite, sachant que les ondes internes linéaires découlent de la superposition de plusieurs sources statistiquement indépendantes.

A.2 Ondes internes non-linéaires

Les ondes internes non-linéaires présentent une signature de surface qui rend possible leur observation par les radars à synthèse d'ouverture (Synthetic Aperture Radar (SAR))

dans la littérature anglophone), voir même parfois à l'oeil nu [Alpers85]. On montre ici une image aérienne qui met en évidence la présence d'ondes internes non-linéaires (cf figure A.2), les ondes internes se manifestent comme des rides à la surface de l'océan. En profondeur, les ondes internes se caractérisent par un fort affaissement de la thermocline (cf figure A.2).

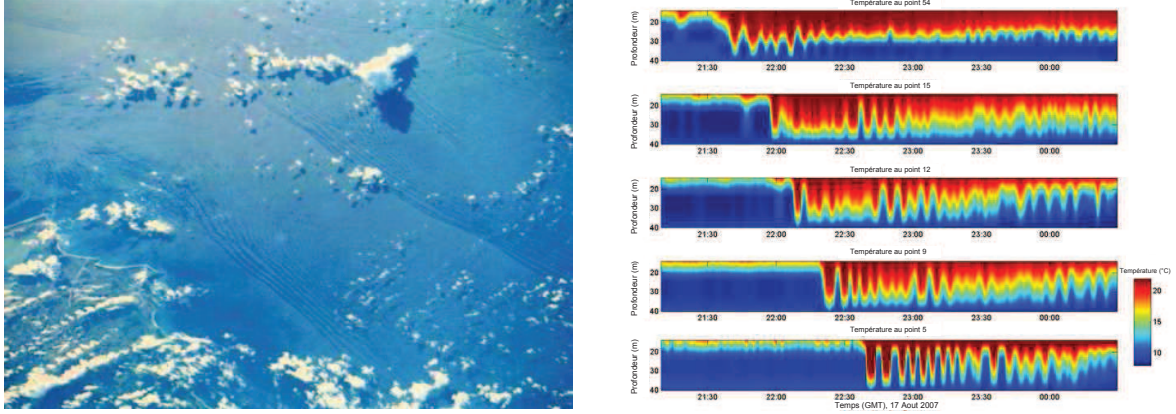


FIGURE A.2 – A gauche : image aérienne sur laquelle on peut voir quelques paquets d'ondes internes non-linéaires, les ondes internes se manifestent comme des rides à la surface de l'océan [Katsnelson12]. A droite : profils de température en fonction du temps à cinq endroits différents sur le plateau continental du New Jersey, les ondes internes se manifestent par un affaissement de la thermocline [Badiéy13].

Les ondes internes non-linéaires se présentent généralement sous la forme de paquets ordonnés d'ondes solitaires (appelées aussi *solitons*) où l'onde solitaire de plus forte amplitude se situe à l'avant du paquet et l'onde solitaire de plus faible amplitude à l'arrière du paquet. Une vue schématique d'un paquet d'ondes solitaires au moment de sa formation au niveau du talus continental et après 12 heures de propagation sur le plateau continental est proposée sur la Figure A.3. Sur le plateau continental, les paquets d'ondes solitaires comportent typiquement quelques solitons (< 20) sur une étendue L de l'ordre de 1 à 10 kilomètres, et se déplacent à une vitesse c_0 de 1 m.s^{-1} environ. La longueur d'onde λ_0 d'un soliton est de l'ordre de la centaine de mètres et l'affaissement 2η de la pycnocline est d'environ 15 mètres. Ces ondes internes se révèlent être plutôt bien décrites par la théorie de Kortweg-deVries qui peut être utilisée pour reproduire en simulation des paquets d'ondes internes non-linéaires [Apel03].

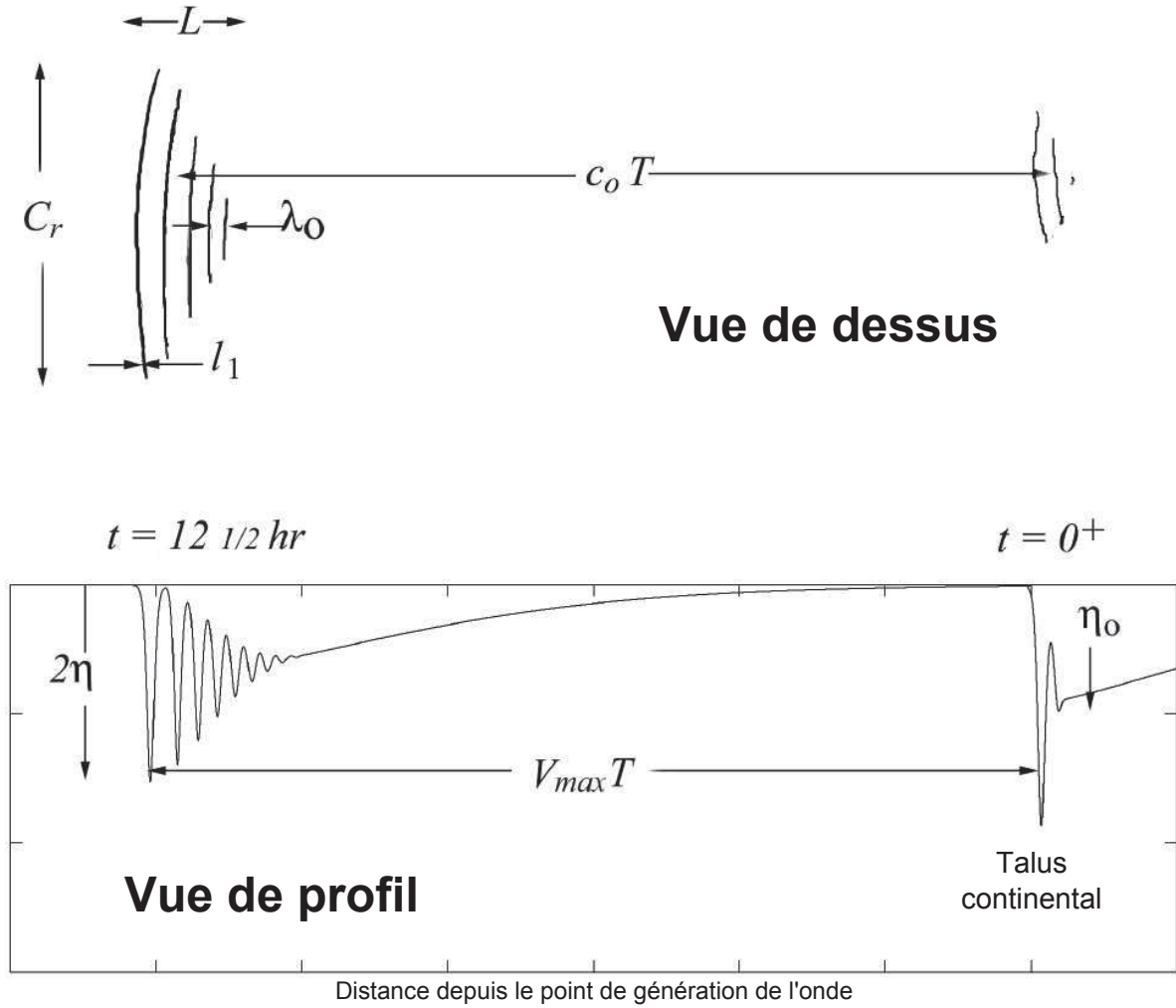


FIGURE A.3 – Vue schématique d'un paquet d'ondes solitaires créé sous l'action de la marée au niveau du talus continental ($t=0$), puis après propagation sur le plateau continental ($t=12\text{h}1/2$) [Apel03]. Le schéma du haut représente une vue de dessus analogue l'image de gauche de la figure A.2, et le schéma du bas représente une vue de profil analogue à l'image de droite de la figure A.2.

Avec le développement de l'imagerie SAR, de nombreux sites où des ondes internes non-linéaires sont présentes ont pu être détectés, répertoriés et étudiés. Un Atlas des ondes internes non-linéaires datant de 2002 mis à jour en 2004 a été créé par Jackson [Jackson04].

Annexe B

Ondes de surface

Le vent crée des ondes de surface, plus communément appelées des vagues, qui induisent une élévation de la hauteur d'eau $\zeta(r, t)$ variable. L'élévation de la surface peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\zeta(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \exp(i(kr - \omega t)) d\omega, \quad (\text{B.1})$$

ou $G(\omega)$ est le spectre d'amplitude et k le nombre d'onde de l'élévation. Le nombre d'onde k est lié à la pulsation ω par la relation de dispersion suivante :

$$\omega^2 = gk \tanh(kH), \quad (\text{B.2})$$

ou g est la constante de gravitation et H la hauteur d'eau. En grand fond, cette relation de dispersion peut être approximée par la relation $\omega^2 = gk$ qui convient aussi dans la plupart des cas en milieux petits fonds même s'il est y plus prudent d'utiliser la relation complète.

Plusieurs modèles paramétriques, basés sur des mesures en mer, existent pour le spectre $G(\omega)$, les plus populaires étant le spectre de Pierson-Neuman et le spectre de Pierson-Moscovitz. On donne ici pour exemple le spectre de Pierson-Moscovitz :

$$G(\omega) = \frac{0,0081g^2}{\omega^5} \exp \left(-0.75 \left(\frac{f}{\omega v} \right)^4 \right), \quad (\text{B.3})$$

ou v désigne la vitesse du vent. Si ces spectre décrivent plutôt bien la partie basse fréquence et donc les grandes longueurs d'ondes des vagues, ils sont plus limités pour décrire les faibles longueurs d'ondes ce qui peut limiter leur applicabilité pour modéliser les interactions avec les ondes acoustiques hautes fréquences.

Annexe C

Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres

Cette annexe présente le calcul des valeurs propres pour le calcul des probabilités d'erreur binaires du chapitre 3. Soit la matrice suivante dont on souhaite calculer les valeurs propres et les vecteurs propres

$$\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) - \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_0). \quad (\text{C.1})$$

Cette matrice est une matrice de rang 2, les vecteurs propres correspondant au deux valeurs propres non-nulles sont des combinaisons linéaires de $\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1)$ et $\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \left[\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) - \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \right] \cdot \left[\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) + \beta \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \right] \\ = \lambda \left[\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) + \beta \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

En développant l'expression ci-dessus, on obtient une expression de la forme

$$a \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) + b \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) = 0, \quad (\text{C.3})$$

où a et b sont des scalaires complexes. Comme les vecteurs $\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0)$ et $\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1)$ ne sont pas colinéaires, les scalaires a et b doivent tous deux valoir zéro. On obtient donc le système d'équations suivant

$$\begin{cases} -\lambda \beta + \beta + \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) &= 0 \\ 1 + \beta \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) + \lambda &= 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système aboutit à

$$\lambda_{1m,2m} = \pm \sqrt{1 - |\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0)|^2}, \quad (\text{C.4})$$

et

$$\beta_{1_m, 2_m} = \frac{\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0)}{\lambda - 1}. \quad (\text{C.5})$$

Les vecteurs propres s'obtiennent par

$$\mathbf{u}_{1_m, 2_m} = \frac{\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) + \beta_{1_m, 2_m} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1)}{\|\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) + \beta_{1_m, 2_m} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1)\|}, \quad (\text{C.6})$$

ce qui en remplaçant $\beta_{1_m, 2_m}$ par son expression donne

$$\mathbf{u}_{1_m, 2_m} = \sqrt{\frac{1 - \lambda_{1_m, 2_m}}{2\lambda_{1_m, 2_m}^2}} \left(\bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) - \frac{1}{1 - \lambda_{1_m, 2_m}} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_0) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_1) \right), \quad (\text{C.7})$$

Annexe D

Bornes de Cramer-Rao

La borne de Cramer-Rao établit que l'EQM de tout estimateur non-biaisé obéit à

$$\text{EQM}_{\text{locale}}(\boldsymbol{\theta}_v) \geq \boldsymbol{\Sigma}_{BCR}(\boldsymbol{\theta}_v) = \mathbf{J}_{\mathbf{D}}^{-1}(\boldsymbol{\theta}_v), \quad (\text{D.1})$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_{BCR}(\boldsymbol{\theta}_v)$ est la BCR en $\boldsymbol{\theta}_v$ et $\mathbf{J}_{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\theta})$ est la matrice d'information de Fisher locale définie par :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\theta}) = -E_{\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \cdot \left(\frac{\partial \ln p(\mathbf{y}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)^H \right]. \quad (\text{D.2})$$

Le calcul de la BCR passe par le calcul et l'inversion de la matrice de Fisher. L'expression de la matrice de Fisher pour les modèles stochastique et déterministe est donnée dans cette annexe.

D.1 Modèle déterministe

Dans le cadre du modèle déterministe, les paramètres à estimer peuvent être décomposés sous la forme du jeu de paramètres $\mathbf{p} = [\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}]$ où $\boldsymbol{\theta}$ représente les $N_{\boldsymbol{\theta}}$ paramètres d'intérêt et $\boldsymbol{\alpha}$ représente les $N_{\boldsymbol{\alpha}}$ paramètres de nuisance. Lorsque les paramètres de nuisance sont à valeur complexe, ils peuvent être décomposés sous la forme réelle $\boldsymbol{\alpha} = [\boldsymbol{\alpha}^{re}, \boldsymbol{\alpha}^{im}]$ où $\boldsymbol{\alpha}^{re}$ est la partie réelle des paramètres et $\boldsymbol{\alpha}^{im}$ est la partie imaginaire. La matrice d'information de Fisher locale peut alors s'écrire sous la forme de la matrice bloc suivante :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{D}}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}} & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}^{re}} & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}^{im}} \\ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}^{re}}^H & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\alpha}^{re}} & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\alpha}^{re}, \boldsymbol{\alpha}^{im}} \\ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}^{im}}^H & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\alpha}^{re}, \boldsymbol{\alpha}^{im}}^H & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\alpha}^{im}} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

D.1.1 Modèle déterministe incohérent

Dans le cadre du modèle déterministe incohérent, il y a $2 \times L \times M$ paramètres de nuisance :

$$\boldsymbol{\alpha}^{re} = \text{Re} \left[[s_1(f_1) \dots s_1(f_M) \dots s_L(f_1) \dots s_L(f_M)] \right], \quad (\text{D.4})$$

et

$$\boldsymbol{\alpha}^{im} = \text{Im} \left[[s_1(f_1) \dots s_1(f_M) \dots s_L(f_1) \dots s_L(f_M)] \right]. \quad (\text{D.5})$$

On peut montrer à partir des équations (2.13) et (D.2) que

$$[\mathbf{J}_D]_{i,j}(\mathbf{p}) = 2 \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \text{Re} \left[\frac{1}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \left(\frac{\partial s_l(f_m) \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial p_i} \right)^H \left(\frac{\partial s_l(f_m) \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial p_j} \right) \right]. \quad (\text{D.6})$$

Ainsi

$$[\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}]_{i,j} = 2 \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^M \text{Re} \left[\frac{|s_l(f_m)|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \left(\frac{\partial \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right)^H \left(\frac{\partial \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right) \right], \forall (i, j) \in \{1, 2 \dots N_{\boldsymbol{\theta}}\}^2, \quad (\text{D.7})$$

$$[\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}^{re}}]_{i, m+M(l-1)} = 2 \times \text{Re} \left[\frac{s_l(f_m)^H}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \left(\frac{\partial \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right)^H \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}) \right],$$

$$\forall (i, m, l) \in \{1, 2 \dots N_{\boldsymbol{\theta}}\} \times \{1, 2 \dots M\} \times \{1, 2 \dots L\}, \quad (\text{D.8})$$

$$[\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}^{im}}]_{i, m+M(l-1)} = -2 \times \text{Im} \left[\frac{s_l(f_m)^H}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \left(\frac{\partial \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right)^H \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}) \right],$$

$$\forall (i, m, l) \in \{1, 2 \dots N_{\boldsymbol{\theta}}\} \times \{1, 2 \dots M\} \times \{1, 2 \dots L\}, \quad (\text{D.9})$$

$$[\mathbf{J}_{\boldsymbol{\alpha}^{re}, \boldsymbol{\alpha}^{im}}] = \mathbf{0}_{(L \times M) \times (L \times M)}, \quad (\text{D.10})$$

et

$$\mathbf{J}_{\boldsymbol{\alpha}^{re}} = \mathbf{J}_{\boldsymbol{\alpha}^{im}} = 2 \times \text{diag}(\mathbf{v}), \quad (\text{D.11})$$

où \mathbf{v} est le vecteur suivant concaténé L fois :

$$\left[\frac{\|\mathbf{g}(f_1, \boldsymbol{\theta})\|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_1)} \dots \frac{\|\mathbf{g}(f_M, \boldsymbol{\theta})\|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_M)} \right]. \quad (\text{D.12})$$

D.1.2 Modèle déterministe cohérent

Dans le cadre du modèle déterministe cohérent, il y a seulement deux paramètres de nuisance : $\alpha^{re} = \text{Re}[s]$ et $\alpha^{im} = \text{Im}[s]$. L'expression (D.6) est toujours valide mais avec $s_l(f_m) = s$. Ainsi,

$$[\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}}]_{i,j} = 2 \times L \sum_{m=1}^M \text{Re} \left[\frac{|s|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \left(\frac{\partial \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right)^H \left(\frac{\partial \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right) \right], \forall (i, j) \in \{1, 2 \dots N_{\boldsymbol{\theta}}\}^2, \quad (\text{D.13})$$

$$[\mathbf{J}_{\theta, \alpha^{re}}]_i = 2 \times L \sum_{m=1}^M \operatorname{Re} \left[\frac{s^H}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \left(\frac{\partial \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right)^H \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}) \right], \forall i \in \{1, 2 \dots N_{\theta}\}, \quad (\text{D.14})$$

$$[\mathbf{J}_{\theta, \alpha^{im}}]_i = -2 \times L \sum_{m=1}^M \operatorname{Im} \left[\frac{s^H}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \left(\frac{\partial \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right)^H \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}) \right], \forall i \in \{1, 2 \dots N_{\theta}\}, \quad (\text{D.15})$$

$$[\mathbf{J}_{\alpha^{re}, \alpha^{im}}] = 0, \quad (\text{D.16})$$

$$\mathbf{J}_{\alpha^{re}} = \mathbf{J}_{\alpha^{im}} = 2 \times L \sum_{m=1}^M \frac{\|\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})\|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)}. \quad (\text{D.17})$$

Les fonctions de Green n'ont pas d'expression analytique. Les quantités ci-dessus et l'inverse de la matrice d'information de Fisher doivent donc être évalués numériquement pour obtenir la BCR. La structure de la matrice d'information de Fisher peut être prise en compte pour obtenir la BCR sur les paramètres d'intérêt directement sans inverser la totalité de la matrice d'information de Fisher. En utilisant une formule d'inversion par bloc et les résultats précédents, on peut montrer que

$$[\mathbf{J}_{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{p})]_{\boldsymbol{\theta}} = \left[\mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}} - \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}, \alpha^{re}} & \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}, \alpha^{im}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\alpha^{re}}^{-1} & \mathbf{0}_{(L \times M) \times (L \times M)} \\ \mathbf{0}_{(L \times M) \times (L \times M)} & \mathbf{J}_{\alpha^{im}}^{-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}, \alpha^{re}} \\ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\theta}, \alpha^{im}} \end{pmatrix} \right]^{-1}, \quad (\text{D.18})$$

où $[\mathbf{J}_{\mathbf{D}}^{-1}(\mathbf{p})]_{\boldsymbol{\theta}}$ est la partie correspondant uniquement aux paramètres d'intérêts de l'inverse de la matrice d'information de Fisher.

D.2 Modèle stochastique

L'expression de la matrice de Fisher pour le modèle de stochastique a été obtenue par Baggeroer [Baggeroer95] :

$$[\mathbf{J}_{\mathbf{D}}]_{i,j}(\boldsymbol{\theta}) = L \sum_{m=1}^M \left[\sigma_s^4 \epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}) \cdot \left(\operatorname{Re}[d^2(f_m, \boldsymbol{\theta}) l_{i,j}(f_m, \boldsymbol{\theta}) - l_i(f_m, \boldsymbol{\theta}) l_j^H(f_m, \boldsymbol{\theta})] \right. \right. \\ \left. \left. + \epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}) \operatorname{Re}[l_i(f_m, \boldsymbol{\theta})] \operatorname{Re}[l_j(f_m, \boldsymbol{\theta})] \right) \right], \quad (\text{D.19})$$

ou

$$d^2(f_m, \boldsymbol{\theta}) = \frac{\|\mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})\|^2}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)}, \quad (\text{D.20})$$

$$\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}) = \frac{2}{1 + \sigma_s^2 d^2(f_m, \boldsymbol{\theta})}, \quad (\text{D.21})$$

$$l_i(f_m, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \mathbf{g}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}, \quad (\text{D.22})$$

$$l_{i,j}(f_m, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \left(\frac{\partial \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right)^H \frac{\partial \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}. \quad (\text{D.23})$$

Là encore, les quantités ci-dessus et l'inverse de la matrice d'information de Fisher doivent être évalués numériquement pour obtenir la BCR.

Annexe E

Bornes de Cramer-Rao bayésiennes

Quand le jeu de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ à estimer est supposé aléatoire de densité de probabilité $p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$, la BCR bayésienne (BCRB) donne une borne inférieure à l'EQM globale [Van Trees68]. Quand le jeu de paramètres $\mathbf{p} = [\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}]$ à estimer contient à la fois des paramètres aléatoires $\boldsymbol{\theta}$ et déterministes $\boldsymbol{\alpha}$ une borne sur l'EQM peut être donnée par la BCR hybride (BCRH) [Rockah87, Messer06]. La BCRB s'applique au modèle de signal source stochastique alors que la BCRH s'applique au modèle de signal source déterministe.

E.1 Modèle déterministe

Comme dans l'annexe D.1, on note $\mathbf{p} = [\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\alpha}]$ le jeu de paramètres à estimer. Les paramètres d'intérêt $\boldsymbol{\theta}$ sont aléatoires alors que les paramètres de nuisance $\boldsymbol{\alpha}$ sont déterministes. La BCRH doit donc être utilisée. Elle établit que [Rockah87, Messer06]

$$E_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\alpha}_0} [(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})(\hat{\mathbf{p}} - \mathbf{p})^T] \geq \boldsymbol{\Sigma}_{BCRH}(\boldsymbol{\alpha}_0) = \mathbf{J}_{\mathbf{H}}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_0), \quad (\text{E.1})$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_{BCRH}(\boldsymbol{\alpha}_0)$ est la BCRH pour la réalisation $\boldsymbol{\alpha}_0$ du jeu de paramètres de nuisances, et $\mathbf{J}_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\alpha})$ est la matrice d'information de Fisher hybride. Quand $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\alpha}$ sont indépendants, la matrice d'information de Fisher hybride est liée à la matrice d'information de Fisher locale $\mathbf{J}_{\mathbf{D}}(\mathbf{p})$ par la relation :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\alpha}) = E_{\boldsymbol{\theta} | \boldsymbol{\alpha}} [\mathbf{J}_{\mathbf{D}}(\mathbf{p})] + \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{A}} & \mathbf{0}_{N_{\boldsymbol{\theta}} \times N_{\boldsymbol{\alpha}}} \\ \mathbf{0}_{N_{\boldsymbol{\alpha}} \times N_{\boldsymbol{\theta}}} & \mathbf{0}_{N_{\boldsymbol{\alpha}} \times N_{\boldsymbol{\alpha}}} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.2})$$

où $\mathbf{J}_{\mathbf{A}}$ est la matrice d'information *a priori*, $[\mathbf{J}_{\mathbf{A}}]_{i,j} = E_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$. La BCRH du modèle déterministe peut donc être calculée en utilisant les résultats donnés dans l'annexe D.1.

E.2 Modèle stochastique

La BCRB établit que [Van Trees68]

$$E_{\mathbf{y},\boldsymbol{\theta}} [(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T] \geq \boldsymbol{\Sigma}_{BCRB} = \mathbf{J}_{\mathbf{B}}^{-1}, \quad (\text{E.3})$$

où $\boldsymbol{\Sigma}_{BCRB}$ est la BCRB et $\mathbf{J}_{\mathbf{B}}$ est la matrice d'information de Fisher bayésienne. Cette matrice est liée à la matrice d'information de Fisher locale $\mathbf{J}_{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\theta})$ par la relation :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{B}} = E_{\boldsymbol{\theta}} [\mathbf{J}_{\mathbf{D}}(\boldsymbol{\theta})] + \mathbf{J}_{\mathbf{A}}, \quad (\text{E.4})$$

où $\mathbf{J}_{\mathbf{A}}$ est la matrice d'information *a priori*, $[\mathbf{J}_{\mathbf{A}}]_{i,j} = E_{\boldsymbol{\theta}} \left[\frac{\partial^2 \ln p_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]$. La BCRB du modèle stochastique peut donc être calculée en utilisant les résultats donnés dans l'annexe D.2.

Annexe F

Erreur asymptotique en présence d'inadéquations

Cette annexe livre les détails des calculs qui permettent d'obtenir l'erreur asymptotique de l'estimateur du MVD en présence d'inadéquations. Nous partons de l'expression (3.63) pour aboutir aux expressions (3.68) et (3.69) des quantités $E_{\mathbf{y}} [\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}]$ et $E_{\mathbf{y}} [\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}^T]$ données au chapitre 3.

On rappelle l'expression (3.63)

$$\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \approx - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \boldsymbol{\theta}^T \partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_f, \mathbf{R}_{l,m}^\infty) \right)^{-1} \times \text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\Delta \mathbf{R}_{l,m}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right]. \quad (\text{F.1})$$

Le calcul de $E_{\mathbf{y}} [\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}]$ à partir de cette expression est assez simple. L'espérance mathématique de $\Delta \mathbf{R}_{l,m}$ vaut

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{y}} [\Delta \mathbf{R}_{l,m}] &= E [\mathbf{y}_l(f_m) \mathbf{y}_l^H(f_m)] - \mathbf{R}_{l,m}^\infty, \\ &= |s_{l,m}|^2 \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v) \mathbf{g}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_v) + \sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) \mathbf{I}_N - |s_{l,m}|^2 \mathbf{g}(f_m, \boldsymbol{\theta}_v) \mathbf{g}^H(f_m, \boldsymbol{\theta}_v), \\ &= \sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) \mathbf{I}_N, \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

donc par linéarité de l'espérance mathématique

$$E_{\mathbf{y}} [\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}] = -\mathbf{F}^{-1} \text{Re} \left[\sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \mathbf{D}_m^H \mathbf{a}_m \right], \quad (\text{F.3})$$

où \mathbf{a}_m , \mathbf{D}_m et \mathbf{F} sont définis par les équations (3.64), (3.66) et (3.67) du chapitre 3.

Le calcul de $E_y [\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}^T]$ est plus fastidieux. On a

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}^T &\approx \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \boldsymbol{\theta}^T \partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_f, \mathbf{R}_{l,m}^\infty) \right)^{-1} \\ &\quad \times \text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\Delta \mathbf{R}_{l,m}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right] \\ &\quad \times \text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\Delta \mathbf{R}_{l,m}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right]^T \\ &\quad \times \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \boldsymbol{\theta}^T \partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_f, \mathbf{R}_{l,m}^\infty) \right)^{-1}. \quad (\text{F.4}) \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\Delta \mathbf{R}_{l,m}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right] \\ &\quad \times \text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\Delta \mathbf{R}_{l,m}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right]^T. \quad (\text{F.5}) \end{aligned}$$

Cette quantité peut se décomposer de la façon suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \left(\text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\mathbf{R}_{l,m}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right] \right. \\ &\quad \left. - \text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\mathbf{R}_{l,m}^\infty}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right] \right) \\ &\quad \times \left(\text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\mathbf{R}_{l,m}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right] \right. \\ &\quad \left. - \text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\mathbf{R}_{l,m}^\infty}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right] \right)^T, \quad (\text{F.6}) \end{aligned}$$

or on a

$$\frac{\partial C}{\partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_f, \mathbf{R}_{l,m}^\infty) = \text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\mathbf{R}_{l,m}^\infty}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right] = \mathbf{0}_{N \times 1}, \quad (\text{F.7})$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\mathbf{R}_{l,m}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right] \\ &\quad \times \text{Re} \left[2 \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\mathbf{R}_{l,m}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m)} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_m, \boldsymbol{\theta}_f) \right]^T. \quad (\text{F.8}) \end{aligned}$$

Pour un vecteur complexe \mathbf{u} quelconque

$$\operatorname{Re}[\mathbf{u}] \operatorname{Re}[\mathbf{u}]^T = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{u}\mathbf{u}^H + \mathbf{u}\mathbf{u}^T], \quad (\text{F.9})$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \operatorname{Re} & \left[2 \sum_{m_1=1}^M \sum_{l_1=1}^L \sum_{m_2=1}^M \sum_{l_2=1}^L \right. \\ & \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_1}, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\mathbf{R}_{l_1, m_1}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_1})} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_1}, \boldsymbol{\theta}_f) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_{m_2}, \boldsymbol{\theta}_f) \frac{\mathbf{R}_{l_2, m_2}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_2})} \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_2}, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \\ & \left. + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_1}, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\mathbf{R}_{l_1, m_1}}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_1})} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_1}, \boldsymbol{\theta}_f) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^T(f_{m_2}, \boldsymbol{\theta}_f) \frac{\mathbf{R}_{l_2, m_2}^*}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_2})} \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^*(f_{m_2}, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right]. \quad (\text{F.10}) \end{aligned}$$

Le calcul de $E_{\mathbf{y}}[\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}^T]$ passe par le calcul de $E_{\mathbf{y}}[\mathbf{S}]$:

$$E_{\mathbf{y}}[\Delta \hat{\boldsymbol{\theta}} \Delta \hat{\boldsymbol{\theta}}^T] \approx \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \boldsymbol{\theta}^T \partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_f, \mathbf{R}_{l, m}^\infty) \right)^{-1} \times E_{\mathbf{y}}[\mathbf{S}] \times \left(\frac{\partial^2 C}{\partial \boldsymbol{\theta}^T \partial \boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}_f, \mathbf{R}_{l, m}^\infty) \right)^{-1}. \quad (\text{F.11})$$

Pour des vecteurs déterministes $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ quelconques de taille $N \times 1$, en notant que \mathbf{R}_{l_2, m_2} est hermitienne

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{\alpha}_1^H \mathbf{R}_{l_1, m_1} \boldsymbol{\alpha}_2 \boldsymbol{\alpha}_3^H \mathbf{R}_{l_2, m_2} \boldsymbol{\alpha}_4 + \boldsymbol{\alpha}_1^H \mathbf{R}_{l_1, m_1} \boldsymbol{\alpha}_2 \boldsymbol{\alpha}_3^T \mathbf{R}_{l_2, m_2}^* \boldsymbol{\alpha}_4^*] = \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N [\boldsymbol{\alpha}_1^*]_i [\boldsymbol{\alpha}_2]_j E[\mathbf{R}_{l_1, m_1}]_{i, j} [\mathbf{R}_{l_2, m_2}]_{k, l} [\boldsymbol{\alpha}_3^*]_k [\boldsymbol{\alpha}_4]_l \\ + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N [\boldsymbol{\alpha}_1^*]_i [\boldsymbol{\alpha}_2]_j E[\mathbf{R}_{l_1, m_1}]_{i, j} [\mathbf{R}_{l_2, m_2}]_{k, l} [\boldsymbol{\alpha}_4^*]_k [\boldsymbol{\alpha}_3]_l. \quad (\text{F.12}) \end{aligned}$$

On note $\mu_i^{l_1, m_1} = [s_{l_1, m_1} \mathbf{g}_v(f_{m_1})]_i$, $\mu_k^{l_2, m_2} = [s_{l_2, m_2} \mathbf{g}_v(f_{m_2})]_k$, $w_i^{l_1, m_1} = [\mathbf{w}_{l_1}(f_{m_1})]_i$ et $w_k^{l_2, m_2} = [\mathbf{w}_{l_2}(f_{m_2})]_k$. À l'aide du théorème d'Isserlis, on montre que

$$\begin{aligned} E[\mathbf{R}_{l_1, m_1}]_{i, j} [\mathbf{R}_{l_2, m_2}]_{k, l} \\ = E[(w_i^{l_1, m_1} + \mu_i^{l_1, m_1})(w_j^{l_1, m_1} + \mu_j^{l_1, m_1})^* (w_k^{l_2, m_2} + \mu_k^{l_2, m_2})(w_l^{l_2, m_2} + \mu_l^{l_2, m_2})^*], \\ = E[(w_i^{l_1, m_1})(w_j^{l_1, m_1})^*] E[(w_k^{l_2, m_2})(w_l^{l_2, m_2})^*] + E[(w_i^{l_1, m_1})(w_k^{l_2, m_2})] E[(w_j^{l_1, m_1})^* (w_l^{l_2, m_2})^*] \\ + E[(w_i^{l_1, m_1})(w_l^{l_2, m_2})^*] E[(w_j^{l_1, m_1})^* (w_k^{l_2, m_2})] + (\mu_i^{l_1, m_1})(\mu_j^{l_1, m_1})^* E[(w_k^{l_2, m_2})(w_l^{l_2, m_2})^*] \\ + (\mu_i^{l_1, m_1})(\mu_k^{l_2, m_2}) E[(w_j^{l_1, m_1})^* (w_l^{l_2, m_2})^*] + (\mu_i^{l_1, m_1})(\mu_l^{l_2, m_2})^* E[(w_j^{l_1, m_1})^* (w_k^{l_2, m_2})] \\ + (\mu_j^{l_1, m_1})^* (\mu_k^{l_2, m_2}) E[(w_i^{l_1, m_1})(w_l^{l_2, m_2})^*] + (\mu_j^{l_1, m_1})^* (\mu_l^{l_2, m_2})^* E[(w_i^{l_1, m_1})(w_k^{l_2, m_2})] \\ + (\mu_k^{l_2, m_2})(\mu_l^{l_2, m_2})^* E[(w_i^{l_1, m_1})(w_j^{l_1, m_1})^*] + (\mu_i^{l_1, m_1})(\mu_j^{l_1, m_1})^* (\mu_k^{l_2, m_2})(\mu_l^{l_2, m_2})^*. \quad (\text{F.13}) \end{aligned}$$

Dans le cas où $l = l_1 = l_2$ et $m = m_1 = m_2$

$$\begin{aligned}
& E \left[[\mathbf{R}_{l_1, m_1}]_{i,j} [\mathbf{R}_{l_2, m_2}]_{k,l} \right] \\
&= [\mathbf{R}_{l, m}^\infty]_{i,j} [\mathbf{R}_{l, m}^\infty]_{k,l} + [\mathbf{R}_{l, m}^\infty]_{i,j} [\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) \mathbf{I}_N]_{k,l} + [\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) \mathbf{I}_N]_{i,j} [\mathbf{R}_{l, m}^\infty]_{k,l} \\
&\quad + [\mathbf{R}_{l, m}^\infty]_{i,l} [\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) \mathbf{I}_N]_{k,j} + [\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) \mathbf{I}_N]_{i,l} [\mathbf{R}_{l, m}^\infty]_{k,j} \\
&\quad + [\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) \mathbf{I}_N]_{i,j} [\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) \mathbf{I}_N]_{k,l} + [\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) \mathbf{I}_N]_{i,l} [\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_m) \mathbf{I}_N]_{k,j},
\end{aligned} \tag{F.14}$$

et si $l_1 \neq l_2$ ou $m_1 \neq m_2$

$$\begin{aligned}
& E \left[[\mathbf{R}_{l_1, m_1}]_{i,j} [\mathbf{R}_{l_2, m_2}]_{k,l} \right] \\
&= [\mathbf{R}_{l_1, m_1}^\infty]_{i,j} [\mathbf{R}_{l_2, m_2}^\infty]_{k,l} + [\mathbf{R}_{l_1, m_1}^\infty]_{i,j} [\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_2}) \mathbf{I}_N]_{k,l} + [\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_1}) \mathbf{I}_N]_{i,j} [\mathbf{R}_{l_2, m_2}^\infty]_{k,l} \\
&\quad + [\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_1}) \mathbf{I}_N]_{i,j} [\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_2}) \mathbf{I}_N]_{k,l}.
\end{aligned} \tag{F.15}$$

Les termes en $[\mathbf{K}]_{i,j} [\mathbf{G}]_{k,l}$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}_{l_1, m_1}^\infty$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{R}_{l_2, m_2}^\infty$ et $\mathbf{G} = \mathbf{R}_{l_1, m_1}^\infty$, $\mathbf{G} = \mathbf{R}_{l_2, m_2}^\infty$, $\mathbf{G} = \sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_1}) \mathbf{I}_N$ ou $\mathbf{G} = \sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_2}) \mathbf{I}_N$ vont donner 0. En effet, par exemple

$$\begin{aligned}
& \text{Re} \left[2 \sum_{m_1=1}^M \sum_{l_1=1}^L \sum_{m_2=1}^M \sum_{l_2=1}^L \right. \\
& \quad \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_1}, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\mathbf{R}_{l_1, m_1}^\infty}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_1})} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_1}, \boldsymbol{\theta}_f) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_{m_2}, \boldsymbol{\theta}_f) \frac{\mathbf{R}_{l_2, m_2}^\infty}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_2})} \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_2}, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \\
& \quad + \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_1}, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\mathbf{R}_{l_1, m_1}^\infty}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_1})} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_1}, \boldsymbol{\theta}_f) \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^T(f_{m_2}, \boldsymbol{\theta}_f) \frac{(\mathbf{R}_{l_2, m_2}^\infty)^*}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_2})} \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon^*(f_{m_2}, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \left. \right] \\
&= 2 \text{Re} \left[2 \sum_{m_1=1}^M \sum_{l_1=1}^L \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_1}, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right)^H \frac{\mathbf{R}_{l_1, m_1}^\infty}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_1})} \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_1}, \boldsymbol{\theta}_f) \right] \\
& \quad \times \text{Re} \left[2 \sum_{m_2=1}^M \sum_{l_2=1}^L \left(\bar{\mathbf{g}}_\epsilon^H(f_{m_2}, \boldsymbol{\theta}_f) \frac{\mathbf{R}_{l_2, m_2}^\infty}{\sigma_{\mathbf{w}}^2(f_{m_2})} \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}_\epsilon(f_{m_2}, \boldsymbol{\theta}_f)}{\partial \boldsymbol{\theta}^T} \right) \right], \tag{F.16}
\end{aligned}$$

est nul d'après l'équation F.7. Il en est de même pour les termes en $[\mathbf{G}]_{i,j} [\mathbf{K}]_{k,l}$. Les termes restants vont donner le résultat final (3.69) du chapitre 3.

Bibliographie

- [Abadi14] S. H. Abadi, A. M. Thode, S. B. Blackwell, and D. R. Dowling. Ranging bowhead whale calls in a shallow-water dispersive waveguide. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **136**(1) :130–144, 2014.
- [Abel93] J. S. Abel. A bound on mean-square-estimate error. *IEEE Transactions on Information Theory*, **39**(5) :1675–1680, 1993.
- [Al-Naffouri09] T. Al-Naffouri and B. Hassibi. On the distribution of indefinite quadratic forms in gaussian random variables. *In International Symposium on Information Theory (ISIT)*, 1744–1748. IEEE, 2009.
- [Alpers85] W. Alpers. Theory of radar imaging of internal waves. *Nature*, **314**(6008) :245–247, 1985.
- [Apel03] J. R. Apel. A new analytical model for internal solitons in the ocean. *Journal of Physical Oceanography*, **33**(11) :2247–2269, 2003.
- [Arveson00] P. T. Arveson and D. J. Vendittis. Radiated noise characteristics of a modern cargo ship. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **107**(1) :118–129, 2000.
- [Athley05] F. Athley. Threshold region performance of maximum likelihood direction of arrival estimators. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **53**(4) :1359–1373, 2005.
- [Aulanier13] F. Aulanier, B. Nicolas, P. Roux, and J. I. Mars. Time-angle sensitivity kernels for sound-speed perturbations in a shallow ocean. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **134**(1) :88–96, 2013.
- [Badiy13] M. Badiy, L. Wan, and A. Song. Time-varying three-dimensional mapping of internal waves during the shallow water 2006 experiment. *In Proceedings of Meetings on Acoustics*, vol. 19. 2013.
- [Baer06] R. Baer and M. Collins. Source localization in the presence of gross sediment uncertainties. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **120**(2) :870–874, 2006.
- [Baggeroer93] A. Baggeroer, W. Kuperman, and P. Mikhalevsky. An overview of matched field methods in ocean acoustics. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **18**(4) :401–424, 1993.

- [Baggeroer95] A. Baggeroer and H. Schmidt. Cramer-rao bounds for matched field tomography and ocean acoustic tomography. In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, vol. 5, 2763–2766. IEEE, 1995.
- [Baggeroer99] A. B. Baggeroer and H. Cox. Passive sonar limits upon nulling multiple moving ships with large aperture arrays. In *Conference Record of the Thirty-Third Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, vol. 1, 103–108. IEEE, 1999.
- [Baggeroer13] A. B. Baggeroer. Why did applications of mfp fail, or did we not understand how to apply mfp ? In *1st Underwater Acoustics Conference and Exhibition (UA2013)*, 41–50. 2013.
- [Ballard10] M. Ballard, K. Becker, and J. Goff. Geoacoustic inversion for the new jersey shelf : 3-d sediment model. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **35**(1) :28–42, 2010.
- [Ballard14] M. S. Ballard, G. V. Frisk, and K. M. Becker. Estimates of the temporal and spatial variability of ocean sound speed on the new jersey shelf. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **135**(6) :3316–3326, 2014.
- [Baraniuk95] R. Baraniuk and D. Jones. Unitary equivalence : A new twist on signal processing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **43**(10) :2269–2282, 1995.
- [Barankin49] E. Barankin. Locally best unbiased estimates. *The Annals of Mathematical Statistics*, 477–501, 1949.
- [Battle03] D. Battle, P. Gerstoft, W. Kuperman, W. Hodgkiss, and M. Siderius. Geoacoustic Inversion of Tow-Ship Noise via Near-Field–Matched-Field Processing. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **28**(3) :454–467, 2003.
- [Bell95] K. L. Bell. *Performance bounds in parameter estimation with application to bearing estimation*. Ph.D. thesis, George Mason University, 1995.
- [Bell97] K. Bell, Y. Steinberg, Y. Ephraim, and H. Van Trees. Extended ziv-zakai lower bound for vector parameter estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, **43**(2) :624–637, 1997.
- [Bellini74] S. Bellini and G. Tartara. Bounds on error in signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Communications*, **22**(3) :340–342, 1974.
- [Bhattacharyya46] A. Bhattacharyya. On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation. *Sankhyā : The Indian Journal of Statistics*, 1–14, 1946.
- [Bobrovsky76] B. Bobrovsky and M. Zakai. A lower bound on the estimation error for certain diffusion processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **22**(1) :45–52, 1976.

-
- [Bonnell08] J. Bonnel, G. Le Touzé, B. Nicolas, J. Mars, and C. Gervaise. Automatic and passive whale localization in shallow water using gunshots. *In OCEANS*, 1–6. IEEE, 2008.
- [Bonnell10] J. Bonnel. *Analyse de la dispersion acoustique UBF (0-150 Hz) pour la surveillance et la caractérisation du milieu marin*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 2010.
- [Bonnell11] J. Bonnel, C. Gervaise, P. Roux, B. Nicolas, and J. Mars. Modal depth function estimation using time-frequency analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **130** :61–71, 2011.
- [Bonnell12] J. Bonnel, C. Gervaise, B. Nicolas, and J. Mars. Single receiver geoaoustic inversion using modal reversal. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **131**(1) :119–128, 2012.
- [Bonnell13a] J. Bonnel, S. E. Dosso, and N. R. Chapman. Bayesian geoaoustic inversion of single hydrophone light bulb data using warping dispersion analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **134**(1) :120–130, 2013.
- [Bonnell13b] J. Bonnel, G. Le Touzé, B. Nicolas, and J. Mars. Physics-based time-frequency representations for underwater acoustics : Power class utilization with waveguide-invariant approximation. *IEEE Signal Processing Magazine*, **30**(6) :120–129, 2013.
- [Bonnell14a] J. Bonnel and A. Thode. Range and depth estimation of bowhead whale calls in the arctic using a single hydrophone. *In Sensor Systems for a Changing Ocean (SSCO)*, 1–4. IEEE, 2014.
- [Bonnell14b] J. Bonnel, A. M. Thode, S. B. Blackwell, K. Kim, and A. M. Macrander. Range estimation of bowhead whale (*balaena mysticetus*) calls in the arctic using a single hydrophonea. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **136**(1) :145–155, 2014.
- [Boyer04a] E. Boyer, P. Forster, and P. Larzabal. Nonasymptotic performance analysis of beamforming with stochastic signals. *IEEE Signal Processing Letters*, **11**(1) :23–25, 2004.
- [Boyer04b] E. Boyer, P. Forster, and P. Larzabal. Nonasymptotic statistical performance of beamforming for deterministic signals. *IEEE Signal Processing Letters*, **11**(1) :20–22, 2004.
- [Brekhovskikh03] L. Brekhovskikh, Y. Lysanov, I. Lysanov, and I. Lysanov. *Fundamentals of ocean acoustics*. Springer Verlag, 2003.
- [Briscoe77] M. G. Briscoe. Gaussianity of internal waves. *Journal of Geophysical Research*, **82**(15) :2117–2126, 1977.
- [Bucker76] H. Bucker. Use of calculated sound fields and matched-field detection to locate sound sources in shallow water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **59**(2) :368–373, 1976.
- [Bush46] V. Bush, J. Conant, and J. Tate. *Principles and applications of underwater sound*. Defense Technical Information Center, 1946.

- [Candy11] J. V. Candy. *Bayesian signal processing : Classical, modern and particle filtering methods*. John Wiley & Sons, 2011.
- [Carey08] W. Carey, A. Pierce, R. Evans, and J. Holmes. On the exponent in the power law for the attenuation at low frequencies in sandy sediments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **124**(5) :EL271–EL277, 2008.
- [Chapman51] D. G. Chapman and H. Robbins. Minimum variance estimation without regularity assumptions. *The Annals of Mathematical Statistics*, **22**(4) :581–586, 1951.
- [Chapman12] N. R. Chapman and D. P. Knobles. Perspectives on geoacoustic inversion. In *AIP Conference Proceedings*. 2012.
- [Chen92] H. Chen and I. Lu. Matched-mode processing schemes of a moving point source. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **92** :2039, 1992.
- [Chen02] H. Chen and I. Lu. Localization of a broadband source using a matched-mode procedure in the time-frequency domain. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **19**(2) :166–174, 2002.
- [Chuprov82] S. Chuprov. Interference structure of a sound field in a layered ocean. *Akustika Okeana, Sovremennoe sostoyanie (Ocean Acoustics, Current State)*, edited by L. M. Brekhovskikh and I. B. Andreevoi (Nauka, Moscow), 71–92, 1982.
- [Clay77] C. Clay and H. Medwin. *Acoustical oceanography : Principles and applications*. Wiley-Interscience, New York, 1977.
- [Cockrell10a] K. Cockrell and H. Schmidt. Robust passive range estimation using the waveguide invariant. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **127**(5) :2780, 2010.
- [Cockrell10b] K. Cockrell, H. Schmidt *et al.* *Understanding and utilizing waveguide invariant range-frequency striations in ocean acoustic waveguides*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2010.
- [Collins91] M. Collins and W. Kuperman. Focalization : Environmental focusing and source localization. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **90**(3) :1410–1422, 1991.
- [Collins92] M. D. Collins, W. Kuperman, and H. Schmidt. Nonlinear inversion for ocean-bottom properties. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **92**(5) :2770–2783, 1992.
- [Collison00] N. Collison and S. Dosso. Regularized matched-mode processing for source localization. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **107**(6) :3089–3100, 2000.
- [Colosi99] J. Colosi, A. Baggeroer, T. Birdsall, C. Clark, B. Cornuelle *et al.* A review of recent results on ocean acoustic wave propagation in random media : Basin scales. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **24**(2) :138–155, 1999.

-
- [Colosi09] J. A. Colosi and A. K. Morozov. Statistics of normal mode amplitudes in an ocean with random sound-speed perturbations : Cross-mode coherence and mean intensity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **126**(3) :1026–1035, 2009.
 - [Colosi15] J. A. Colosi. A reformulation of the λ - ϕ diagram for the prediction of ocean acoustic fluctuation regimes. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **137**(5) :2485–2485, 2015.
 - [Cramer46] H. Cramer. *Mathematical methods of statistics*. Princeton university press, 1946.
 - [Creamer96] D. B. Creamer. Scintillating shallow-water waveguides. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **99**(5) :2825, 1996.
 - [Decarli14] N. Decarli and D. Dardari. Ziv-zakai bound for time delay estimation of unknown deterministic signals. *In International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 4673–4677. IEEE, 2014.
 - [Del Balzo88] D. Del Balzo, C. Feuillade, and M. Rowe. Effects of water-depth mismatch on matched-field localization in shallow water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **83**(6) :2180–2185, 1988.
 - [Dosso93] S. E. Dosso. Matched-field inversion for source localization with uncertain bathymetry. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **94**(2) :1160–1163, 1993.
 - [Dosso01] S. E. Dosso, M. J. Wilmut, and A.-L. S. Lapinski. An adaptive-hybrid algorithm for geoacoustic inversion. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **26**(3) :324–336, 2001.
 - [Dosso02a] S. E. Dosso. Quantifying uncertainty in geoacoustic inversion. i. a fast gibbs sampler approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **111**(1) :129–142, 2002.
 - [Dosso02b] S. E. Dosso and P. L. Nielsen. Quantifying uncertainty in geoacoustic inversion. ii. application to broadband, shallow-water data. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **111**(1) :143–159, 2002.
 - [Dosso02c] S. E. Dosso and M. J. Wilmut. Effects of incoherent and coherent source spectral information in geoacoustic inversion. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **112**(4) :1390–1398, 2002.
 - [Dosso03] S. E. Dosso. Environmental uncertainty in ocean acoustic source localization. *Inverse Problems*, **19**(2) :419–431, 2003.
 - [Dosso07a] S. E. Dosso, M. G. Morley, P. M. Giles, G. H. Brooke, D. F. McCammon *et al.* Spatial field shifts in ocean acoustic environmental sensitivity analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **122**(5) :2560–2570, 2007.
 - [Dosso07b] S. E. Dosso and M. J. Wilmut. Bayesian focalization : Quantifying source localization with environmental uncertainty. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **121**(5) :2567–2574, 2007.

- [Dosso11a] S. E. Dosso and J. Dettmer. Bayesian matched-field geoacoustic inversion. *Inverse Problems*, **27**(5) :055009, 2011.
- [Dosso11b] S. E. Dosso and M. J. Wilmut. Bayesian multiple-source localization in an uncertain ocean environment. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **129**(6) :3577–3589, 2011.
- [Dosso12] S. E. Dosso and M. J. Wilmut. Maximum-likelihood and other processors for incoherent and coherent matched-field localization. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **132**(4) :2273–2285, 2012.
- [Duda12] T. F. Duda, J. M. Collis, Y.-T. Lin, A. E. Newhall, J. F. Lynch *et al.* Horizontal coherence of low-frequency fixed-path sound in a continental shelf region with internal-wave activity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **131**(2) :1782–1797, 2012.
- [Dushaw93] B. Dushaw, P. Worcester, B. Cornuelle, and B. Howe. On equations for the speed of sound in seawater. *Journal of the Acoustical Society of America*, **93**(1) :255–275, 1993.
- [Etter13] P. C. Etter. *Underwater acoustic modeling and simulation*. CRC Press, 2013.
- [Ferréol08] A. Ferréol, P. Larzabal, and M. Viberg. Performance prediction of maximum-likelihood direction-of-arrival estimation in the presence of modeling errors. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **56**(10) :4785–4793, 2008.
- [Feuillade89] C. Feuillade, D. Del Balzo, and M. M. Rowe. Environmental mismatch in shallow-water matched-field processing : Geoacoustic parameter variability. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **85**(6) :2354–2364, 1989.
- [Flatté79] S. Flatté, R. Dashen, W. H. Munk, K. M. Watson, and F. Zachariasen. *Sound transmission through a fluctuating ocean*. Cambridge University Press, 1979.
- [Forster01] P. Forster and P. Larzabal. Sur les bornes minimales pour l’estimation de paramètres déterministes. In *actes du 18ème colloque du GRETSI*. 2001.
- [Forster02] P. Forster and P. Larzabal. On lower bounds for deterministic parameter estimation. In IEEE, (Ed.) *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, vol. 2, II–1137–II–1140. 2002.
- [Fredricks05] A. Fredricks, J. A. Colosi, J. F. Lynch, G. Gawarkiewicz, C.-S. Chiu *et al.* Analysis of multipath scintillations from long range acoustic transmissions on the new england continental slope and shelf. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **117**(3) :1038–1057, 2005.
- [Garrett72] C. Garrett and W. Munk. Space-time scales of internal waves. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, **3**(1) :225–264, 1972.

-
- [Garrett75] C. Garrett and W. Munk. Space-time scales of internal waves : A progress report. *Journal of Geophysical Research*, **80**(3) :291–297, 1975.
- [Garrett79] C. Garrett and W. Munk. Internal waves in the ocean. *Annual Review of Fluid Mechanics*, **11**(1) :339–369, 1979.
- [Gerstoft94] P. Gerstoft. Inversion of seismoacoustic data using genetic algorithms and a posteriori probability distributions. *Journal of the Acoustical Society of America*, **95**(2) :770–782, 1994.
- [Gerstoft98] P. Gerstoft and C. Mecklenbrauker. Ocean acoustic inversion with estimation of a posteriori probability distributions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **104**(2) :808–819, 1998.
- [Gervaise12] C. Gervaise, B. Kinda, J. Bonnel, Y. Stéphan, and S. Vallez. Passive geoacoustic inversion with a single hydrophone using broadband ship noise. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **131**(3) :1999–2010, 2012.
- [Golub12] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix computations*, vol. 3. JHU Press, 2012.
- [Grachev93] G. Grachev and J. Wood. Theory of acoustic field invariants in layered waveguides. *Acoustical physics*, **39**(1) :33–35, 1993.
- [Hai-Qiang13] N. Hai-Qiang, Z. Ren-He, L. Zheng-Lin, G. Yong-Gang, and H. Li. Bubble pulse cancelation in the time-frequency domain using warping operators. *Chinese Physics Letters*, **30**(8) :084301, 2013.
- [Hamilton80] E. L. Hamilton. Geoacoustic modeling of the sea floor. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **68**(5) :1313–1340, 1980.
- [Hammersley50] J. Hammersley. On estimating restricted parameters. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, **12**(2) :192–240, 1950.
- [Hamson89] R. M. Hamson and R. M. Heitmeyer. Environmental and system effects on source localization in shallow water by the matched-field processing of a vertical array. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **86**(5) :1950–1959, 1989.
- [Hawkes98] M. Hawkes and A. Nehorai. Acoustic vector-sensor beamforming and capon direction estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **46**(9) :2291–2304, 1998.
- [Heaney04] K. D. Heaney. Rapid geoacoustic characterization using a surface ship of opportunity. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **29**(1) :88–99, 2004.
- [Hermand96] J.-P. Hermand and P. Gerstoft. Inversion of broad-band multi-tone acoustic data from the YELLOW SHARK summer experiments. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **21**(4) :324–346, 1996.
- [Hildebrand09] J. A. Hildebrand. Anthropogenic and natural sources of ambient noise in the ocean. *Marine Ecology Progress Series*, **395**(5), 2009.

- [Hinich73] M. J. Hinich. Maximum-likelihood signal processing for a vertical array. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **54**(2) :499–503, 1973.
- [Hlawatsch98] F. Hlawatsch. *Time-frequency analysis and synthesis of linear signal spaces : time-frequency filters, signal detection and estimation, and Range-Doppler estimation*. Springer Science & Business Media, 1998.
- [Huang04] C.-F. Huang and W. S. Hodgkiss. Matched-field geoacoustic inversion of low-frequency source tow data from the asiaex east china sea experiment. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **29**(4) :952–963, 2004.
- [Huang06] C.-F. Huang, P. Gerstoft, and W. S. Hodgkiss. Uncertainty analysis in matched-field geoacoustic inversions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **119**(1) :197–207, 2006.
- [Idier13] J. Idier. *Bayesian approach to inverse problems*. John Wiley & Sons, 2013.
- [Jackson04] C. R. Jackson and J. R. Apel. An atlas of internal solitary-like waves and their properties, 2004.
- [Jensen11] F. Jensen, W. Kuperman, M. Porter, and H. Schmidt. *Computational ocean acoustics, 2nd ed.* New York : American Institute of Physics, 2011.
- [Jiang09] Y.-M. Jiang and N. R. Chapman. The impact of ocean sound speed variability on the uncertainty of geoacoustic parameter estimates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **125**(5) :2881–2895, 2009.
- [Katsnelson12] B. G. Katsnelson, V. G. Petnikov, and J. F. Lynch. *Fundamentals of shallow water acoustics*. Springer, 2012.
- [Kay93] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing : Estimation Theory*. Prentice Hall, 1993.
- [Kinda13] G. B. Kinda. *Monitoring de la glace de mer en Arctique à partir de mesure à long terme du paysage acoustique sous-marin*. Ph.D. thesis, Université de Grenoble, 2013.
- [Kinda14] G. B. Kinda and J. Bonnel. Passive acoustic monitoring of coastal dynamical oceanographic phenomena using single hydrophone. *In Sensor Systems for a Changing Ocean (SSCO)*, 1–5. IEEE, 2014.
- [Korakas10] A. Korakas. *Approche numérique et expérimentale de la propagation sonore en environnements océaniques tridimensionnels : application aux problèmes inverses*. Ph.D. thesis, Ecole Centrale de Lyon, 2010.
- [Korakas11] A. Korakas and F. Sturm. On the feasibility of a matched-field inversion in a three-dimensional oceanic environment ignoring out-of-plane propagation. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **36**(4) :716–727, 2011.

-
- [Krolik96] J. L. Krolik. The performance of matched-field beamformers with mediterranean vertical array data. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **44**(10) :2605–2611, 1996.
- [Kuzkin11] V. Kuzkin, Y.-T. Lin, A. Lunkov, J. Lynch, and V. Petnikov. Frequency shifts of the sound field interference pattern on oceanic shelf in summer conditions. *Acoustical Physics*, **57**(3) :381–390, 2011.
- [Le Courtois14a] F. Le Courtois and J. Bonnel. Autoregressive model for high-resolution wavenumber estimation in a shallow water environment using a broadband source. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **135**(4) :EL199–EL205, 2014.
- [Le Courtois14b] F. Le Courtois and J. Bonnel. Wavenumber tracking in a low resolution frequency-wavenumber representation using particle filtering. In *International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 6805–6809. IEEE, 2014.
- [Le Gall13a] Y. Le Gall and J. Bonnel. Débruitage et séparation dans le plan temps-fréquence des contributions sonores de navires en mouvement. *Traitement du signal*, **30**(3-5) :149–168, 2013.
- [Le Gall13b] Y. Le Gall and J. Bonnel. Méthode d’estimation de l’invariant océanique par couple de modes en acoustique sous-marine passive. In *actes du 24ème colloque du GRETSI*. 2013.
- [Le Gall13c] Y. Le Gall and J. Bonnel. Passive estimation of the waveguide invariant per pair of modes. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **134**(2) :EL230–EL236, 2013.
- [Le Gall13d] Y. Le Gall and J. Bonnel. Separation of moving ship striation patterns using physics-based filtering. In *Proceedings of Meetings on Acoustics*, vol. 19. 2013.
- [Le Gall14a] Y. Le Gall, F.-X. Socheleau, and J. Bonnel. Matched-field processing performance under the stochastic and deterministic signal models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **62**(22) :5825–5838, 2014.
- [Le Gall14b] Y. Le Gall, F.-X. Socheleau, and J. Bonnel. Performance analysis of single receiver matched-mode processing for source localization. In *2nd Underwater Acoustics Conference and Exhibition (UA2014)*. 2014.
- [Le Gall15a] Y. Le Gall, S. E. Dosso, F.-X. Socheleau, and J. Bonnel. Bayesian source localization with uncertain green’s function. In *OCEANS*. IEEE, 2015.
- [Le Gall15b] Y. Le Gall, S. E. Dosso, F.-X. Socheleau, and J. Bonnel. Bayesian source localization with uncertain green’s function in an uncertain shallow water ocean. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2015. En révision.
- [Le Gall15c] Y. Le Gall, F.-X. Socheleau, and J. Bonnel. Performance prediction for matched-field processing with model mismatch. *IEEE Signal Processing Letters*, 2015. Soumis.

- [Le Touzé07] G. Le Touzé. *Localisation de source par petits fonds en UBF (1-100 Hz) à l'aide d'outils temps-fréquence*. Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2007.
- [Le Touzé08] G. Le Touzé, J. Torras, B. Nicolas, and J. Mars. Source localization on a single hydrophone. *In OCEANS*, 1–6. IEEE, 2008.
- [Le Touzé09] G. Le Touzé, B. Nicolas, J. Mars, and J. Lacoume. Matched representations and filters for guided waves. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **57**(5) :1783–1795, 2009.
- [Lin06] Y.-T. Lin, C.-F. Chen, and J. F. Lynch. An equivalent transform method for evaluating the effect of water-column mismatch on geoacoustic inversion. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **31**(2) :284–298, 2006.
- [Lindsay93] C. Lindsay and N. Chapman. Matched field inversion for geoacoustic model parameters using adaptive simulated annealing. *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, **18**(3) :224–231, 1993.
- [Liu13] Z. Liu, C. Sun, Y. Yang, and J. Du. Robust source localization using predictable mode subspace in uncertain shallow ocean environment. *In OCEANS*, 1–5. IEEE, 2013.
- [Lurton98] X. Lurton. *Acoustique sous-marine : présentation et applications*. Editions Quae, 1998.
- [Matz02] G. Matz and F. Hlawatsch. Time-frequency projection filters : on-line implementation, subspace tracking, and application to interference excision. *In Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, vol. 2, 1213–1216. IEEE, 2002.
- [McKenna12] M. F. McKenna, D. Ross, S. M. Wiggins, and J. A. Hildebrand. Underwater radiated noise from modern commercial ships. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **131**(1) :92–103, 2012.
- [Mecklenbräuker00] C. Mecklenbräuker and P. Gerstoft. Objective functions for ocean acoustic inversion derived by likelihood methods. *Journal of Computational Acoustics*, **8**(02) :259–270, 2000.
- [Mecklenbrauker01] C. Mecklenbrauker and A. Gershman. Broadband maximum likelihood estimation of shallow ocean parameters using shipping noise. *In International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 3105–3108. IEEE, 2001.
- [Meng10] T. Meng and J. R. Buck. Rate distortion bounds on passive sonar performance. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **58**(1) :326–336, 2010.
- [Messer06] H. Messer. The hybrid cramer-rao lower bound-from practice to theory. *In Workshop on Sensor Array and Multi-channel Processing (SAM)*, 304–307. IEEE, 2006.
- [Michalopoulou96] Z.-H. Michalopoulou and M. B. Porter. Matched-field processing for broad-band source localization. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **21**(4) :384–392, 1996.

-
- [Morley08] M. G. Morley, S. E. Dosso, and N. R. Chapman. Parameter estimate biases in geoacoustic inversion from neglected range dependence. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **33**(3) :255–265, 2008.
- [Munk79] W. Munk and C. Wunsch. Ocean acoustic tomography : a scheme for large scale monitoring. *Deep Sea Research Part A. Oceanographic Research Papers*, **26**(2) :123–161, 1979.
- [Munk95] W. Munk, P. Worcester, and C. Wunsch. *Ocean acoustic tomography*. Cambridge Univ Pr, 1995.
- [Musil99] M. Musil, M. Wilmut, and N. Chapman. A hybrid simplex genetic algorithm for estimating geoacoustic parameters using matched-field inversion. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **24**(3) :358–369, 1999.
- [Newhall12] A. E. Newhall, Y.-T. Lin, J. F. Lynch, M. F. Baumgartner, and G. G. Gawarkiewicz. Long distance passive localization of vocalizing sei whales using an acoustic normal mode approach. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **131**(2) :1814–1825, 2012.
- [Nicholas04] M. Nicholas, J. Perkins, G. Orris, L. Fialkowski, and G. Heard. Environmental inversion and matched-field tracking with a surface ship and an l-shaped receiver array. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **116**(5) :2891–2901, 2004.
- [Nicolas09] B. Nicolas, G. Le Touzé, C. Soares, S. Jesus, and J. Marsal. Incoherent versus coherent matched mode processing for shallow water source localisation using a single hydrophone. *Instrumentation viewpoint*, **8** :67–68, 2009.
- [Orris00] G. J. Orris, M. Nicholas, and J. S. Perkins. The matched-phase coherent multi-frequency matched-field processor. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **107**(5) :2563–2575, 2000.
- [Oudompheng13] B. Oudompheng, C. Gervaise, L. Lamotte, W. Ouedraogo, B. Nicolas *et al.* Modélisation temporelle des sources acoustiques d’un bâtiment marin ou sous-marin en mouvement dans le champ lointain. *In actes du 24ème colloque du GRETSI*. 2013.
- [Ozard89] J. M. Ozard. Matched field processing in shallow water for range, depth, and bearing determination : Results of experiment and simulation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **86**(2) :744–753, 1989.
- [Pawitan01] Y. Pawitan. *In all likelihood : statistical modelling and inference using likelihood*. Oxford University Press, 2001.
- [Pekeris48] C. L. Pekeris. Theory of propagation of explosive sound in shallow water. *Geological Society of America Memoirs*, **27** :1–116, 1948.
- [Petnikov02] V. Petnikov and V. Kuzkin. Shallow water variability and its manifestation in the interference pattern of sound fields. *In Ocean acoustic interference phenomena and signal processing*, vol. 621, 207–220. AIP Publishing, 2002.

- [Petrov14] P. Petrov. A method for single-hydrophone geoacoustic inversion based on the modal group velocities estimation : Application to a waveguide with inhomogeneous bottom relief. *In Days on Diffraction (DD), 2014*, 186–191. IEEE, 2014.
- [Porter87] M. B. Porter, R. L. Dicus, and R. G. Fizell. Simulations of matched-field processing in a deep-water pacific environment. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **12**(1) :173–181, 1987.
- [Porter93] M. B. Porter. Acoustic models and sonar systems. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **18**(4) :425–437, 1993.
- [Potty00] G. R. Potty, J. H. Miller, J. F. Lynch, and K. B. Smith. Tomographic inversion for sediment parameters in shallow water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **108**(3) :973–986, 2000.
- [Quijano12] J. E. Quijano, S. E. Dosso, J. Dettmer, L. M. Zurk, M. Siderius *et al.* Bayesian geoacoustic inversion using wind-driven ambient noise. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **131**(4) :2658–2667, 2012.
- [Raghukumar13] K. Raghukumar and J. A. Colosi. The effect of surface and linear internal waves on higher order acoustic moments in shallow water. *In Proceedings of Meetings on Acoustics*, vol. 19. 2013.
- [Raghukumar15] K. Raghukumar and J. A. Colosi. High-frequency normal-mode statistics in shallow water : The combined effect of random surface and internal waves. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **137**(5) :2950–2961, 2015.
- [Rajan10] S. Rajan and K. Becker. Inversion for range-dependent sediment compressional-wave-speed profiles from modal dispersion data. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **35**(1) :43–58, 2010.
- [Rao45] C. R. Rao. Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters. *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, **37** :81–89, 1945.
- [Ren13] Q.-y. Ren and J.-P. Hermand. Acoustic interferometry for geoacoustic characterization in a soft-layered sediment environment. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **133**(1) :82–93, 2013.
- [Ren14] C. Ren, J. Galy, E. Chaumette, P. Larzabal, and A. Renaux. A ziv-zakai type bound for hybrid parameter estimation. *In International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 4663–4667. IEEE, 2014.
- [Renaux05] A. Renaux, P. Forster, and P. Larzabal. Une nouvelle approche des bornes bayésiennes. *In actes du 20ème colloque du GRETSI*. 2005.
- [Renaux06] A. Renaux, P. Forster, E. Chaumette, and P. Larzabal. On the high-snr conditional maximum-likelihood estimator full statistical characterization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **54**(12) :4840–4843, 2006.

-
- [Renaux07] A. Renaux. *Contribution à l'analyse des performances d'estimation en traitement statistique du signal*. Ph.D. thesis, ENS CACHAN, 2007.
 - [Renaux08] A. Renaux, P. Forster, P. Larzabal, C. D. Richmond, and A. Nehorai. A fresh look at the bayesian bounds of the weiss-weinstein family. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **56**(11) :5334–5352, 2008.
 - [Richardson91] A. Richardson and L. Nolte. A posteriori probability source localization in an uncertain sound speed, deep ocean environment. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **89**(5) :2280–2284, 1991.
 - [Richmond05] C. Richmond. Capon algorithm mean-squared error threshold snr prediction and probability of resolution. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **53**(8) :2748–2764, 2005.
 - [Richmond06a] C. Richmond. Mean-squared error and threshold snr prediction of maximum-likelihood signal parameter estimation with estimated colored noise covariances. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**(5) :2146–2164, 2006.
 - [Richmond06b] C. D. Richmond. On the threshold region mean-squared error performance of maximum-likelihood direction-of arrival estimation in the presence of signal model mismatch. *In Workshop on Sensor Array and Multichannel Processing*, 268–272. IEEE, 2006.
 - [Richmond12] C. D. Richmond and L. L. Horowitz. Aspects of threshold region mean squared error prediction : Method of interval errors, bounds, taylor's theorem and extensions. *In Signals, Systems and Computers (ASILOMAR)*, 13–17. IEEE, 2012.
 - [Richmond15] C. D. Richmond and L. L. Horowitz. Parameter bounds on estimation accuracy under model misspecification. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **63**(9) :2263–2278, 2015.
 - [Rife74] D. Rife and R. R. Boorstyn. Single tone parameter estimation from discrete-time observations. *IEEE Transactions on Information Theory*, **20**(5) :591–598, 1974.
 - [Robert07] C. Robert. *The Bayesian choice : from decision-theoretic foundations to computational implementation*. Springer Science & Business Media, 2007.
 - [Rockah87] Y. Rockah and P. Schultheiss. Array shape calibration using sources in unknown locations—part i : Far-field sources. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, **35**(3) :286–299, 1987.
 - [Rouseff02] D. Rouseff and R. Spindel. Modeling the waveguide invariant as a distribution. *In AIP Conference Proceedings*, vol. 621, 137–150. 2002.
 - [Routtenberg12] T. Routtenberg and J. Tabrikian. A general class of outage error probability lower bounds in bayesian parameter estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **60**(5) :2152–2166, 2012.

- [Shang91] E. Shang and Y. Wang. Environmental mismatching effects on source localization processing in mode space. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **89**(5) :2285–2290, 1991.
- [Shorey94] J. Shorey, L. Nolte, and J. Krolik. Computationally efficient monte carlo estimation algorithms for matched field processing in uncertain ocean environments. *Journal of Computational Acoustics*, **2**(3) :285–314, 1994.
- [Shorey98] J. Shorey and L. Nolte. Wideband optimal a posteriori probability source localization in an uncertain shallow ocean environment. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **103**(1) :355–361, 1998.
- [Soares03] C. Soares and S. M. Jesus. Broadband matched-field processing : Coherent and incoherent approaches. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **113**(5) :2587–2598, 2003.
- [Stoica90] P. Stoica and A. Nehorai. Performance study of conditional and unconditional direction-of-arrival estimation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, **38**(10) :1783–1795, 1990.
- [Stotts10] S. Stotts, R. Koch, S. Joshi, V. Nguyen, V. Ferreri *et al.* Geoacoustic inversions of horizontal and vertical line array acoustic data from a surface ship source of opportunity. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **35**(1) :79–102, 2010.
- [Tabrikian96] J. Tabrikian and H. Messer. Three-dimensional source localization in a waveguide. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **44**(1) :1–13, 1996.
- [Tabrikian97] J. Tabrikian, J. Krolik, and H. Messer. Robust maximum-likelihood source localization in an uncertain shallow-water waveguide. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **101**(1) :241–249, 1997.
- [Tabrikian99] J. Tabrikian and J. Krolik. Barankin bounds for source localization in an uncertain ocean environment. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **47**(11) :2917–2927, 1999.
- [Tang07] D. Tang, J. Moum, J. Lynch, P. Abbot, R. Chapman *et al.* Shallow water 06 : A joint acoustic propagation/nonlinear internal wave physics experiment. 2007.
- [Thode00] A. Thode, G. D’Spain, and W. Kuperman. Matched-field processing, geoacoustic inversion, and source signature recovery of blue whale vocalizations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **107** :1286–1300, 2000.
- [Thode02] A. Thode, M. Zanolin, E. Naftali, I. Ingram, P. Ratilal *et al.* Necessary conditions for a maximum likelihood estimate to become asymptotically unbiased and attain the cramer-rao lower bound. ii. range and depth localization of a sound source in an ocean waveguide. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **112**(5) :1890–1910, 2002.

-
- [Thode06] A. M. Thode, P. Gerstoft, W. C. Burgess, K. G. Sabra, M. Guerra *et al.* A portable matched-field processing system using passive acoustic time synchronization. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **31**(3) :696–710, 2006.
- [Thorp67] W. Thorp. Analytic description of the low-frequency attenuation coefficient. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **42**(1) :270–270, 1967.
- [Tielburger97] D. Tielburger, S. Finette, and S. Wolf. Acoustic propagation through an internal wave field in a shallow water waveguide. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **101**(2) :789–808, 1997.
- [Tindle81] C. Tindle and G. Bold. Improved ray calculations in shallow water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **70**(3) :813–819, 1981.
- [Todros10a] K. Todros and J. Tabrikian. General classes of performance lower bounds for parameter estimation-part i : Non-bayesian bounds for unbiased estimators. *IEEE Transactions on Information Theory*, **56**(10) :5045–5063, 2010.
- [Todros10b] K. Todros and J. Tabrikian. General classes of performance lower bounds for parameter estimation-part ii : Bayesian bounds. *IEEE Transactions on Information Theory*, **56**(10) :5064–5082, 2010.
- [Tollefsen08] D. Tollefsen and S. Dosso. Bayesian geoacoustic inversion of ship noise on a horizontal array. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **124** :788–795, 2008.
- [Tolstoy93] A. Tolstoy. *Matched field processing for underwater acoustics*. World Scientific Singapore, 1993.
- [Turgut07] A. Turgut, M. Orr, and B. Pasewark. Acoustic monitoring of the tide height and slope-water intrusion at the new jersey shelf in winter conditions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **121**(5) :2534–2541, 2007.
- [Turgut10] A. Turgut, M. Orr, and D. Rouseff. Broadband source localization using horizontal-beam acoustic intensity striations. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **127**(1) :73–83, 2010.
- [Turgut13] A. Turgut, P. Mignerey, D. Goldstein, and J. A. Schindall. Acoustic observations of internal tides and tidal currents in shallow water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **133**(4) :1981–1986, 2013.
- [Vaidyanathan95] C. Vaidyanathan and K. M. Buckley. Performance analysis of the mvdr spatial spectrum estimator. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **43**(6) :1427–1437, 1995.
- [Van Trees68] H. Van Trees. *Detection, Estimation, and Modulation Theory Part I*. Wiley, 1968.

- [Van Trees07] H. Van Trees and K. Bell. *Bayesian bounds for parameter estimation and nonlinear filtering/tracking*. Wiley-IEEE Press, 2007.
- [vanLeijen09] A. van Leijen, J. Hermand, and M. Meyer. Geoacoustic inversion in the north-eastern caribbean using a hydrographic survey vessel as a sound source of opportunity. *Journal of Marine Systems*, **78** :S333–S338, 2009.
- [Waite02] A. D. Waite. *Sonar for practising engineers*. Wiley London, 2002.
- [Wan10] L. Wan, J. Zhou, and P. Rogers. Low-frequency sound speed and attenuation in sandy seabottom from long-range broadband acoustic measurements. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **128**(2) :578–589, 2010.
- [Weinstein88] E. Weinstein and A. Weiss. A general class of lower bounds in parameter estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, **34**(2) :338–342, 1988.
- [Weiss85] A. J. Weiss and E. Weinstein. A lower bound on the mean-square error in random parameter estimation (corresp.). *IEEE Transactions on Information Theory*, **31**(5) :680–682, 1985.
- [Westwood92] E. K. Westwood. Broadband matched-field source localization. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **91**(5) :2777–2789, 1992.
- [Wilson88] G. Wilson, R. Koch, and P. Vidmar. Matched mode localization. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **84**(1) :310–320, 1988.
- [Xu01] W. Xu. *Performance bounds on matched-field methods for source localization and estimation of ocean environmental parameters*. Ph.D. thesis, MIT, Cambridge, MA, 2001.
- [Xu04a] W. Xu, A. Baggeroer, and K. Bell. A bound on mean-square estimation error with background parameter mismatch. *IEEE Transactions on Information Theory*, **50**(4) :621–632, 2004.
- [Xu04b] W. Xu, A. Baggeroer, and C. Richmond. Bayesian bounds for matched-field parameter estimation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **52**(12) :3293–3305, 2004.
- [Xu06] W. Xu, A. Baggeroer, and H. Schmidt. Performance analysis for matched-field source localization : Simulations and experimental results. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **31**(2) :325–344, 2006.
- [Xu11a] W. Xu and J. Li. Study of statistical signal models in low-frequency underwater acoustic applications. In *OCEANS*, 1–5. IEEE, 2011.
- [Xu11b] W. Xu, Z. Xiao, and L. Yu. Performance analysis of matched-field source localization under spatially correlated noise field. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **36**(2) :273–284, 2011.
- [Yang87] T. Yang. A method of range and depth estimation by modal decomposition. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **82**(5) :1736–1745, 1987.

- [Yang90] T. Yang. Effectiveness of mode filtering : A comparison of matched-field and matched-mode processing. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **87**(5) :2072–2084, 1990.
- [Yang99] T. Yang and K. Yoo. Internal wave spectrum in shallow water : Measurement and comparison with the garrett-munk model. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **24**(3) :333–345, 1999.
- [Yang06] T. Yang. Measurements of temporal coherence of sound transmissions through shallow water. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **120**(5) :2595–2614, 2006.
- [Yardim12] C. Yardim, P. Gerstoft, and W. S. Hodgkiss. Sequential geoacoustic inversion at the continental shelfbreak. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **131**(2) :1722–1732, 2012.
- [Yoo99] K. Yoo and T. Yang. Broadband source localization in shallow water in the presence of internal waves. *The journal of the Acoustical Society of America*, **106**(6) :3255–3269, 1999.
- [Zanolin04] M. Zanolin, I. Ingram, A. Thode, and N. Makris. Asymptotic accuracy of geoacoustic inversions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **116**(4) :2031–2042, 2004.
- [Zeng13] J. Zeng, N. R. Chapman, and J. Bonnel. Inversion of seabed attenuation using time-warping of close range data. *The Journal of the Acoustical Society of America*, **134**(5) :EL394–EL399, 2013.
- [Zhou14] S. Zhou, Y. Qi, and Y. Ren. Frequency invariability of acoustic field and passive source range estimation in shallow water. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, **57**(2) :225–232, 2014.
- [Ziv69] J. Ziv and M. Zakai. Some lower bounds on signal parameter estimation. *IEEE Transactions on Information Theory*, **15**(3) :386–391, 1969.

Résumé — Une onde acoustique se propageant au sein du milieu sous-marin est porteuse d'informations sur la source (distance, profondeur,...) et sur les propriétés physiques de l'environnement océanique (profondeur d'eau, célérités dans l'eau et dans le fond,...). Ces informations peuvent être obtenues par la résolution d'un problème inverse. Ce problème est classiquement abordé comme un problème d'optimisation visant à minimiser une fonction d'erreur entre le champ de pression observé et celui issu d'un modèle de propagation (méthodes dites de *matched-field processing*). Le résultat de l'inversion est fondamentalement incertain car d'une part les mesures sont affectées de bruit et d'autre part le modèle de propagation est imparfaitement connu du fait de la complexité du milieu marin.

Le premier axe de notre étude concerne l'analyse des performances de ces méthodes d'estimation. L'estimation des paramètres d'intérêt est un problème non-linéaire qui souffre d'ambiguïtés importantes au delà d'un certain niveau de bruit et la méconnaissance du milieu de propagation est une difficulté considérable de ces méthodes qui ne doit pas être négligée dans l'analyse des performances. Des outils statistiques adaptés à la prédiction des performances de ces problèmes inverses sont mis au point. La borne minimale d'estimation de Ziv-Zakai et la méthode des erreurs d'intervalle sont considérées. Ces outils sont ensuite utilisés pour analyser les performances d'un problème particulier de localisation de source.

Le second axe abordé au cours de la thèse vise à perfectionner les méthodes de localisation de source pour accroître leur robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation de l'environnement océanique. Une méthode bayésienne de localisation de source adaptée aux milieux de propagation sous-marins incertains est développée. La fonction de Green est modélisée comme vecteur aléatoire dont la densité de probabilité représente l'incertitude sur l'environnement. L'introduction d'un a priori physique sur la propagation modale améliore les performances quand l'environnement de propagation est mal connu. En outre, le formalisme bayésien fournit une mesure quantitative de la confiance pouvant être accordée à chaque estimation de la position de la source, information très précieuse en contexte opérationnel.

Mots clés : localisation de source, théorie de modes, incertitude vis-à-vis du milieu de propagation, inversion bayésienne, bornes de performance, approximations des performances.

Abstract — An acoustic wave propagating in the underwater environment carries information about the source (range, depth,...) and about the physical properties of the oceanic environment (water depth, sound speed in the water column and the bottom,...). Such information can be obtained by solving an inverse problem. This inverse problem is conventionally addressed through the minimization of an error function between the measured pressure field and the pressure field obtained from a propagation model (*matched-field processing methods*). The result of the inversion is inherently uncertain : on the one hand the measurements are affected by noise and on the other hand the propagation model is imperfectly known because of the complexity of the marine environment.

The first part of the present study deals with performance analysis of these estimation methods. The estimation of the parameters of interest is a nonlinear problem which suffers from significant ambiguities beyond a certain noise level and errors in the assumed propagation medium are a considerable difficulty of these methods that should not be neglected in performance analysis. Statistical tools for predicting the performance of these inverse problems are developed. The Ziv-Zakai bound and the method of interval error are considered. These tools are then used to analyze the performance of a particular source localization problem.

The second part of our work aims to increase source localization's robustness against modeling errors of the oceanic environment. A Bayesian source localization method that handles uncertainty in the oceanic environment is developed. The Green's function is considered as a random vector that accounts for environmental uncertainty through its probability density. A physical a priori on modal propagation enhances performance when the environment is poorly known. In addition, the Bayesian formalism provides a quantitative measure of the confidence that can be given to each estimate of the source position, which is a very valuable information in an operational context.

Keywords : source localization, normal mode theory, uncertain propagation medium, Bayesian inversion, performance bounds, performance approximations.

Une onde acoustique se propageant au sein du milieu sous-marin est porteuse d'informations sur la source (distance, profondeur,...) et sur les propriétés physiques de l'environnement océanique (profondeur d'eau, célérités dans l'eau et dans le fond,...). Ces informations peuvent être obtenues par la résolution d'un problème inverse. Ce problème est classiquement abordé comme un problème d'optimisation visant à minimiser une fonction d'erreur entre le champ de pression observé et celui issu d'un modèle de propagation (méthodes dites de matched-field processing). Le résultat de l'inversion est fondamentalement incertain car d'une part les mesures sont affectées de bruit et d'autre part le modèle de propagation est imparfaitement connu du fait de la complexité du milieu marin. Le premier axe de notre étude concerne l'analyse des performances de ces méthodes d'estimation. L'estimation des paramètres d'intérêt est un problème non-linéaire qui souffre d'ambiguïtés importantes au-delà d'un certain niveau de bruit et la méconnaissance du milieu de propagation est une difficulté considérable de ces méthodes qui ne doit pas être négligée dans l'analyse des performances. Des outils statistiques adaptés à la prédiction des performances de ces problèmes inverses sont mis au point. La borne minimale d'estimation de Ziv-Zakai et la méthode des erreurs d'intervalle sont considérées. Ces outils sont ensuite utilisés pour analyser les performances d'un problème particulier de localisation de source. Le second axe abordé au cours de la thèse vise à perfectionner les méthodes de localisation de source pour accroître leur robustesse vis-à-vis des erreurs de modélisation de l'environnement océanique. Une méthode bayésienne de localisation de source adaptée aux milieux de propagation sous-marins incertains est développée. La fonction de Green est modélisée comme vecteur aléatoire dont la densité de probabilité représente l'incertitude sur l'environnement. L'introduction d'un a priori physique sur la propagation modale améliore les performances quand l'environnement de propagation est mal connu. En outre, le formalisme bayésien fournit une mesure quantitative de la confiance pouvant être accordée à chaque estimation de la position de la source, information très précieuse en contexte opérationnel.

Mots-clés : Localisation de source, Théorie de modes, Incertitude vis-à-vis du milieu de propagation, Inversion bayésienne, Bornes de performance, Approximations des performances.

An acoustic wave propagating in the underwater environment carries information about the source (range, depth,...) and about the physical properties of the oceanic environment (water depth, sound speed in the water column and the bottom,...). Such information can be obtained by solving an inverse problem. This inverse problem is conventionally addressed through the minimization of an error function between the measured pressure field and the pressure field obtained from a propagation model (matched-field processing methods). The result of the inversion is inherently uncertain: on the one hand the measurements are affected by noise and on the other hand the propagation model is imperfectly known because of the complexity of the marine environment. The first part of the present study deals with performance analysis of these estimation methods. The estimation of the parameters of interest is a nonlinear problem which suffers from significant ambiguities beyond a certain noise level and errors in the assumed propagation medium are a considerable difficulty of these methods that should not be neglected in performance analysis. Statistical tools for predicting the performance of these inverse problems are developed. The Ziv-Zakai bound and the method of interval error are considered. These tools are then used to analyze the performance of a particular source localization problem. The second part of our work aims to increase source localization's robustness against modeling errors of the oceanic environment. A Bayesian source localization method that handles uncertainty in the oceanic environment is developed. The Green's function is considered as a random vector that accounts for environmental uncertainty through its probability density. A physical a priori on modal propagation enhances performance when the environment is poorly known. In addition, the Bayesian formalism provides a quantitative measure of the confidence that can be given to each estimate of the source position, which is a very valuable information in an operational context.

Keywords : Source localization, Normal mode theory, Uncertain propagation medium, Bayesian inversion, Performance bounds, Performance approximations.